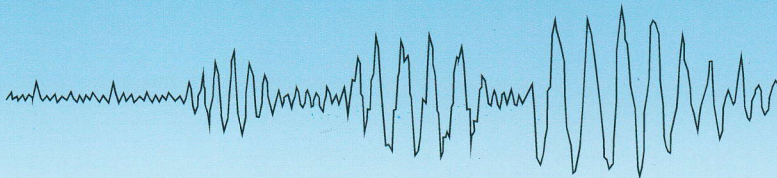
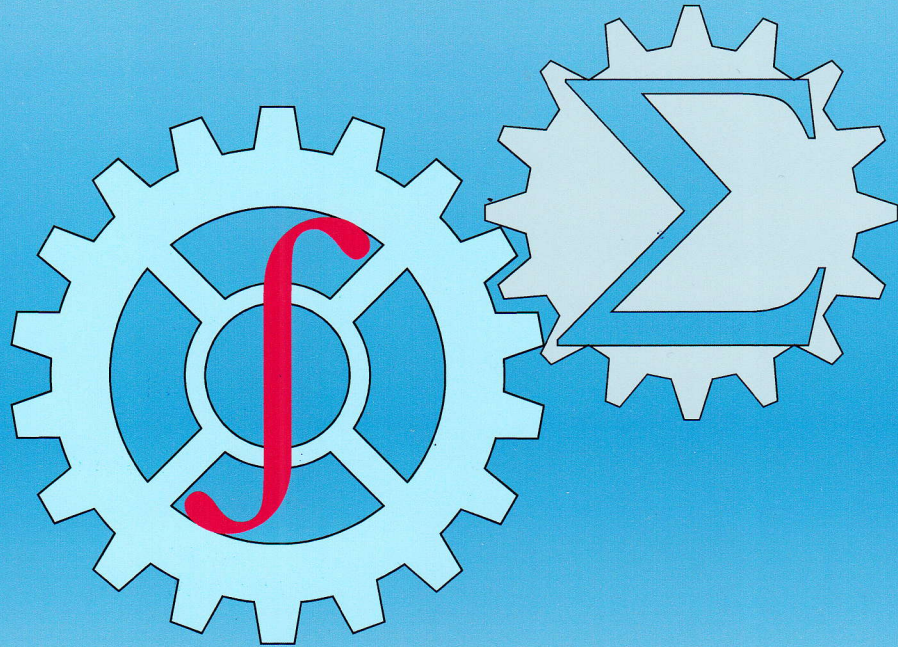




ISSN: 2010-7250
Published from 1992

Институт механики и сейсмостойкости сооружений
Mechanika va inshootlar seysmik mustahkamligi instituti

МЕХАНИКА МУАММОЛАРИ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ PROBLEMS OF MECHANICS



2023
Volume 32
No: 3

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

МЕХАНИКА
МУАММОЛАРИ

O‘ZBEKISTON
JURNALI

3

2023

УЗБЕКСКИЙ
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ

Журнал под таким названием издается с января 1992 г.

Ташкент – 2023

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – докт. физ.-мат. наук, проф. К.С. СУЛТАНОВ
Заместитель главного редактора – докт. физ.-мат. наук Р.А. АБИРОВ
Заместитель главного редактора – PhD Н.А. НИШОНОВ
Ответственный секретарь – PhD М.М.ХАМДАМОВ

Абдикаримов Р.А. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Мирсаидов М. д.т.н., проф., акад. АН РУз (Ташкент)
Абдусаттаров А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Мухаммадиев Д.М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Азимов Д. д.т.н., проф. (США)	Панахов Г.М. д.т.н., проф., член.-корр. НАНА (Баку)
Алдошин Н.В. д.т.н., проф. (Москва)	Паровик Р. д.ф.-м.н. (Петропавловск-Камчатский)
Алимухамедов Ш.П. д.т.н., проф. (Ташкент)	Ризаев А.А. д.т.н., проф. (Ташкент)
Ахмедов А.Б. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Сагдиев Х.С. к.т.н. (Ташкент)
Бахадиров Г.А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Сирождидинов З. д.т.н., проф. (Самарканд)
Быковцев А.С. д.ф.-м.н., проф. (США)	Старовойтов Э.И. д.ф.-м.н. (Гомель, Беларусь)
Ватин Н.И. д.т.н., проф. (Санкт-Петербург)	Тохилов Ш.М. к.ф.-м.н. (США)
Дусматов О.М. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)	Тухтакузиев А.Т. д.т.н., проф. (Ташкент)
Зубарев А.Ю. д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург)	Ташбалтаев М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Исмоилова С.И. д.т.н., проф. (Ташкент)	Худайкулиев Р.Р. к.т.н. (Ташкент)
Казанцев С.П. д.т.н., проф. (Москва)	Хужаев И.К. д.т.н., проф. (Ташкент)
Кузнецов С.В. д.ф.-м.н., проф. (Москва)	Хужаёров Б.Х. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)
Маликов З.М. д.т.н., проф. (Ташкент)	Хусанов Б.Э. д.т.н. (Ташкент)
Мамасаидов М.Т. д.т.н., проф., акад. НАН КР (Ош)	Шардаков И.Н. д.ф.-м.н., проф. (Пермь)
Мардонов Б.М. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Эргашов М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Матвеев В.П. д.т.н., проф., акад. РАН (Пермь)	Ювмитов А.С. PhD (Ташкент)
	Юлдашев Ш.С. д.т.н., проф. (Наманган)

Адрес редакции:

100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 33.
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз

Телефон: +99871 262-78-34

Факс: +99871 262-71-52

E-mail: instmechofficial@gmail.com

Технический редактор: Михайлова В.В.

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.
Регистрационный номер 0050.

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала 07.06.2023

Сдано в набор 01.08.2023. Подписано в печать 07.09.2023.

Формат 60×84 ¹/₈. Гарнитура Times New Roman. Ризография.

Усл.- печ. л. 6.5. Уч.-изд. л. 6.82. Тираж 130. Заказ № 701.

Цена договорная.

Отпечатано в Минитипографии АН РУз:
100047, г. Ташкент, ул. акад. Я. Гулямова, 70.

ВИКТОР ВАСИЛЬЕВИЧ МОСКВИТИН И ТЕОРИЯ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ



В сентябре 2023 г. исполняется 100 лет со дня рождения Виктора Васильевича Москвитина - крупного ученого-механика, доктора физико-математических наук, профессора кафедры «Теория упругости» механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова.

В 1941 г. после окончания школы В.В.Москвитин был призван в Красную Армию и направлен на ускоренные артиллерийские курсы Ташкентского военного училища и после его окончания в 1942 году и получения звания лейтенанта был направлен в действующую армию. Участник Сталинградской битвы. Получил тяжелое ранение в начале 1943 года и после лечения демобилизован. За участие в Сталинградской битве был награжден орденом Красной Звезды и медалью «За оборону Сталинграда».

В 1944 году В.В. Москвитин поступает на механико-математический факультет МГУ, с которым была связана вся его дальнейшая трудовая деятельность.

Научную деятельность он начал в начале 50-х годов под руководством выдающегося ученого-механика XX столетия А.А.Ильюшина.

Глубокие теоретические знания и практические навыки позволили В.В. Москвитину стать одним из основателей теории упругопластических деформаций при циклических нагружениях. Им были развиты теории пластичности и термовязкой упругости для случая циклических нагружений; выведены основные уравнения переменной пластичности и доказаны теоремы о простом переменном нагружении, о вторичных пластических деформациях, а также теоремы о переменных нагружениях. Предложены критерии циклической прочности и устойчивости упругопластических систем с учетом предыстории нагружения. Введена функция повреждаемости для оценки прочности упругопластических и реономных тел при циклических нагружениях. Предложены уравнения состояния для сложных нагружений упругопластических тел с переменными разгрузками, даны постановки соответствующих краевых задач и рассмотрены методы их решения.

Им подтверждена классификация пластических свойств материалов - циклически упрочняющиеся, циклически разупрочняющиеся, циклически идеальные и обобщен критерий малоциклового усталости при нестационарных нагружениях.

Одним из направлений научных исследований В.В.Москвитина являются вопросы деформации нелинейных вязкоупругих и вязкопластических тел. При циклических нагружениях вязкоупругих тел происходит теплообразование, обратная ползучесть, виброползучесть и повреждаемость материалов, приводящих к разрушению. Им предложены модели вязкоупругих сред, учитывающие влияние вида напряженного состояния, степени накопленных повреждений и степени полимеризации, критерии длительной прочности, а также модели вязкопластических тел, испытывающих циклические нагружения.

Результаты исследований нашли отражение в опубликованных им многочисленных научных статьях и следующих монографиях: «Пластичность при переменных нагружениях», «Сопроотивление вязкоупругих материалов», «Циклические нагружения элементов конструкций».

За трудовые успехи уже в качестве наставника и ученого В.В. Москвитин был награжден Орденом Трудового Красного Знамени.

Научные результаты, полученные В.В. Москвитиним являются крупным вкладом в механику деформируемых твердых тел. Множество его научных идей нашли продолжение в работах его учеников и последователей, в трудах целых научных школ. Отметим некоторые из них.

Вопросы приложения теории пластичности В.В.Москвитина к расчетам деталей машин и элементов конструкций на прочность при повторно-статических нагружениях рассматривались Р.М.Шнейдеровичем. Анализ полей напряжений и деформаций в зонах концентрации и расчет на

прочность при малоцикловом нагружении проведены Н.А.Махутовым. Описание диаграмм циклического деформирования для ряда конструкционных материалов выполнены А.П.Гусенковым и Г.В.Москвитиным, показаны возможные уточнения, упрощения и интерпретации диаграмм деформирования при решении задач циклической прочности. В работах Г.В.Москвитина разработаны модели и методика расчета на прочность оболочечных конструкций при высокотемпературном малоцикловом нагружении, в частности, в виде тонкостенных гофрированных оболочек вращения. Для определения значений упругопластических деформаций и напряжений в зависимости от числа нагружений, оценки характера в опасных зонах сифонного компенсатора разработаны численные методы решения краевой задачи о повторном нагружении гофрированной оболочки.

Теория пластического деформирования трансверсально изотропных материалов при переменных нагружениях получила развитие в работах В.В.Колокольчикова. Им обобщена теорема о переменном нагружении В.В.Москвитина для случая моментных напряжений и пьезоэлектрического эффекта. Влияние истории нагружения на устойчивость и критическое поведение упругопластических систем исследовано в работах В.Г.Гаджиева и Ф.К.Исаева. Теория и методы расчета термопластичности и термовязкопластичности при переменных нагружениях отражены в исследованиях Ю.Н.Шевченко. Им доказана теорема о простом переменном нагружении при неравномерном нагреве. Напряженно-деформированные состояния упругопластических и вязкопластических элементов конструкций при переменных и термосиловых нагружениях исследованы Э.И.Старовойтовым, Э.С.Акоевой, Л.Х.Талыблы и А.В.Городецким. В работах Э.И.Старовойтова с учениками сформулированы постановка и методы решения задач статики и динамики упругих, упругопластических и вязкоупругопластических трехслойных стержней, пластинок и оболочек. Численно исследовано НДС трехслойных цилиндрических оболочек и пластин при действии однократных и циклических нагрузок с учетом тепловых, радиационных воздействий.

Работы В.В.Москвитина получили развитие и в Узбекистане. Теория упругопластических деформаций при переменных нагружениях, и теория вязкоупругости широко и эффективно использовались при решении прикладных задач в механике деформируемого тела В.К.Кабуловым, Т.Р.Рашидовым, Т.Буриевым, К.Ш.Бабамуратовым, Б.М.Мардоновым, А.А.Халджигитовым и др. Т.Буриевым сформулирован ряд краевых задач по статическому и динамическому расчету несущих элементов тонкостенных конструкций при произвольных повторных и переменных нагружениях и нагружениях в текущих величинах. На основе вариационных методов, методов конечных разностей и конечных элементов реализована на ЭВМ и апробирована алгоритмическая система расчета тонкостенных и объемных конструкций. В работах Т.Буриева, А.Абдусаттарова, для анализа НДС элементов конструкций используется обобщенный принцип Мазинга-Москвитина. На основе модифицированных алгоритмов расчета и комплекса программ исследована поцикловая кинетика НДС круглых, эллиптических и прямоугольных плит, оболочечных конструкций с учетом вторичных пластических деформаций, циклического упрочнения-разупрочнения и накопления повреждений. А.Расулмухамедовым разработан комплекс программ расчета на прочность трехмерных тел призматических конструкций с учетом циклических пластических деформаций методом конечных элементов.

Виктор Васильевич Москвитин уделял большое внимание подготовке научных кадров. Им подготовлены 26 кандидатов и 5 докторов наук. Он неоднократно бывал в Ташкенте, выступая на конференциях, в качестве оппонента диссертационных работ.

20 сентября 2023г. в Московском государственном университете состоится Международная конференция “Переменные нагружения в механике деформируемого твёрдого тела”, посвящённая 100-летию со дня рождения выдающегося ученого-механика, профессора кафедры «Теории упругости» МГУ Виктора Васильевича Москвитина.

Проведение этой конференции - знак особого внимания и благодарности, дань глубокого уважения и памяти крупного ученого В.В.Москвитина.

Считаем, что материалы конференции позволят ознакомиться с новыми задачами и актуальными направлениями в области циклического нагружения.

*д.ф.-м.н., профессор Э.И.Старовойтов (БелГУТ)
д.т.н., профессор А.Абдусаттаров (ТГТУ)*

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЕ О «РАХМАТУЛИНСКИХ ЧТЕНИЯХ»

26–27 мая 2023 г в г. Ташкент в Национальном университете Узбекистана прошла Международная научно-практическая конференция «РАХМАТУЛИНСКИЕ ЧТЕНИЯ».

Халил Ахмедович Рахматулин – видный ученый-механик, академик АН УзССР, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, профессор МГУ им М.В. Ломоносова.

За многолетнюю научную и педагогическую деятельность Х.А.Рахматулин внес большой вклад в развитие отечественной и мировой науки, являлся создателем новых научных направлений в области теоретической и прикладной механики.

Прошедшие впервые в нашей республике «Рахматулинские чтения» явились заметным событием в научной жизни Узбекистана.

Организаторами мероприятия выступили Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Московский государственный университет имени Ломоносова, Центральный аэрогидродинамический институт имени Н.Е. Жуковского, Институт механики и сейсмостойкости сооружений Академии наук Республики Узбекистан имени М.Т. Уразбаева

Международная конференция была организована при поддержке Академии наук Республики Узбекистан, а также Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан.

В работе конференции приняли участие акад. РАН Нигматулин Р.И. – научный руководитель Института океанологии РАН имени П.П.Ширшова, заведующий кафедрой МГУ им М.В. Ломоносова, акад. РАН Чернышев С.Л. – вице президент РАН, директор ЦАГИ имени Н.Е. Жуковского, акад. АН РУз Мирсаидов М. – зав. кафедрой ТИИМСХ, акад. АН РУз Алимов Ш.А. – зав. кафедрой НУУз, акад. АН РУз Азамов А.А. – зав. кафедрой НУУз, проф. Маджидов И.У. – ректор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, проф. Султанов К.С. – директор ИМиСС АН РУз, проф. Мардонов Б. – профессор ТИТЛП и др.

Общее количество участников конференции с докладами было 225, из них 45 зарубежных участников.

В широкий круг научных направлений которые охватило мероприятие были включены следующие тематики: распространение волн в упругопластических средах; прикладные задачи механики жидкости и газа; вычислительная механика и имитационное моделирование; механика неоднородных сред и композитов; робототехника, управление и стабилизация динамических систем.

По итогам конференции были приняты следующие решения:

- Проведение каждые два года в нашей республике международной научно-практической конференции «Рахматулинские чтения», посвященной памяти Халила Ахмедовича Рахматулина;
- учреждение специальных премий имени наших ученых-механиков, внесших большой вклад в становление и развитие важнейших направлений науки о механике в нашей республике;
- издание сборника научных трудов Халила Ахмедовича Рахматулина.

Одной из задач конференции являлась популяризация в целом механики как научной дисциплины, ознакомление широкой общественности с научными и инновационными результатами в области механики многофазных сред и механики деформируемых твердых тел, укрепление международного сотрудничества и научных связей между высшими учебными заведениями и научными институтами стран ближнего и дальнего зарубежья.

Особое внимание было уделено созданию научной и творческой среды, повышающей научный потенциал и опыт молодых исследователей, независимых исследователей и докторантов, координации научно-исследовательских работ и укрепление научных связей с ведущими научными центрами, а также привлечению молодежи к научной деятельности в нашей Республике.

В данном номере журнала представлены статьи докладов на прошедшей конференции в г.Ташкенте.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ



**ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ ЧЛЕН АКАДЕМИИ НАУК УЗБЕКИСТАНА
АКАДЕМИК ХАЛИЛ АХМЕДОВИЧ РАХМАТУЛИН**

Халил Ахмедович Рахматулин родился 23 апреля 1909 года в г.Токмак Киргизской Республики. В 1925 году Халил Ахмедович поступил в педагогический техникум в г. Ташкенте и после его окончания работал там и одновременно продолжил обучение в Среднеазиатском Государственном университете (ныне Национальный университет Узбекистана). В 1931 году поступил в Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова. Закончив учебу, Халил Ахмедович остался в МГУ и проработал там до конца жизни, занимаясь научной и педагогической деятельностью.

С 1937 года, после защиты кандидатской диссертации, Х.А.Рахматулин работал доцентом на механико-математическом факультете МГУ и заведующим лабораторией аэродинамики.

В 1943 году защитил докторскую диссертацию по теории парашютов в МГУ. В 1947 году Х.А.Рахматулин был избран действительным членом Академии наук УзССР.

Научная деятельность выдающегося ученого отличается яркостью и многогранностью его интересов. Его научные исследования посвящены проблемам аэродинамики, волновой динамики, динамики грунтов, прочности тел при кратковременных нагрузках, занимающих важное место в области механики. Научные работы Х.А.Рахматулина также посвящены процессам распространения упругих и пластических волн в сложных средах, ударным волнам, образующимся и распространяющимся в газах, динамике многокомпонентных сред, динамическим процессам химических технологий и многим другим проблемам механики.

Халил Ахмедович Рахматулин является автором фундаментальных результатов по механике нитей. Он существенно помогал и дал много полезных советов специалистам в этой области в Узбекистане о возможностях повышения прочности текстильных нитей. В нашей республике в этом направлении продолжают исследования его ученики М. Эргашов, А. Бараев, К.Одилов и многие другие.

В области аэродинамической теории проницаемых тел его учениками А.А.Хамидовым, Г.И.Гаюбовым, Р.Худайбердиевым и др. решен ряд задач раскрытия купола парашюта, изготовленного из проницаемой ткани, разработаны методики численного расчета на ЭВМ напряженного состояния и прочности материала парашюта при обтекании осесимметричной поверхности купола парашюта воздухом.

Решение волновых краевых задач, связанных движением тел в грунтах с использованием модели Рахматулина выполнены Ш.М.Маматкуловым, У.Саримсоковым, Е.Саидовым, М.Ахмедовым. Исследования по изучению деформационных характеристик различных типов грунтов в рамках их нелинейного деформирования и проблемы взаимодействия подземных сооружений с грунтами продолжаются в лабораториях в Институте механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз Б.Мардоновым, К.С.Султановым, Б.Э.Хусановым и многими другими учеными.

На основе теории двухфазных сред в механике грунтов, предложенной Х.А.Рахматулином и М.А.Био, проводились исследования изучения динамики пористых сред, насыщенных жидкостью. Я.У.Соатов, Б.Мардонов, Т.Артиков, Ш.Н.Наримов и др. провели научные исследования по решению теоретических и практических проблем в области распространения слабых сейсмических волн

в водонасыщенных грунтах, применительно для работ по сейсмическому районированию территории.

Под непосредственным руководством Х.А.Рахматулина создана научная школа по теории многофазных сред. Известный ученый Дж. Файзуллаев, К.Ш.Латипов, В.К.Коголовский, А.Сайфуллин, А.А.Хамидов, О.Умаров, А.О.Шокиров, Ш.Шохамидов и многие другие внесли большой вклад в становление и развитие теории движения многофазных сред. В работах З.М.Маликова, К.Наврзуова и др. получены важные результаты в области развития задачи гидродинамики смесей в пористых трубах, имеющих важное значение для движения крови в кровеносных сосудах, влаги при внутрипочвенном орошении и др.

Учениками Х.А. Рахматулина Р.Садыковым, Х.Валижановым и др. изучены движения тел сложной конфигурации в линейных и нелинейных постановках на основе метода частиц для решения задач газовой динамики и теории упругости.

Халил Ахмедович Рахматулин внес большой вклад в решение задач в области хлопкоуборочных машин и аэродинамики пневмотранспорта. Опираясь на идеи ученого, применив специальный пульсатор для привода воздушного потока в пневматических хлопкоуборочных машинах, Б.А.Левкович, Г.И.Мирошниченко, В.Байдюк, Г.И.Болдинский, Ф.А.Саади, Х.А.Зияев и др. разработали эффективные способы извлечения хлопкового волокна из зубьев пил в пневмотранспортном оборудовании и хлопкоочистительном производстве. Х.А Рахматулин руководил созданием новых технологий предварительной обработки риса и хлопка-сырца с применением аэродинамики и аэрохимии. Под его руководством были разработаны гидродинамические устройства нового типа для получения качественных смесей и суспензий ранее неизвестными за рубежом новыми методами.

Неоценимая заслуга Халила Ахмедовича в подготовке высококвалифицированных научных кадров для нашей республики. Подготовленные им специалисты, доктора и кандидаты наук успешно работают в научно-исследовательских учреждениях и вузах республики, успешно развивают научные исследования по широким направлениям механики.

Халил Ахмедович Рахматулин наряду с научной, вел научно-организационную работу. Он был академиком секретарем Отделения физико-математических наук АН УзССР. По его инициативе были созданы аэродинамическая и гидродинамическая лаборатория и отдел аэрохимической механики в Институте механики и сейсмостойкости сооружений АН УзССР, лаборатория волновая динамика в Институте сейсмологии АН УзССР, группа по взрыву и удару в Институте кибернетики с ВЦ АН УзССР. Он был одним из организаторов Всесоюзных съездов по механике, организатором и руководителем регулярно созываемых Всесоюзных симпозиумов по распространению волн, членом редколлегии научных журналов АН СССР и УзССР, членом многих ученых советов учебных и научно-исследовательских институтов. Неоднократно с большим успехом Халил Ахмедович представлял науку страны на международных конгрессах и симпозиумах, выступал на них с докладами.

Халил Ахмедовичу Рахматулину было присвоено звание Героя Социалистического Труда, он был четырежды награжден орденом Ленина, орденом Трудового Красного Знамени, орденом Знака Почета и многими другими медалями. Ему присвоено звание Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР и УзССР. Он дважды лауреат Государственной премии СССР, дважды лауреат премии Совета Министров СССР, лауреат Государственной премии Республики Узбекистан имени Бегруни, премии им.М.В.Ломоносова.

Светлая память о Халиле Ахмедовиче будет жить в наших сердцах, в оставленном им научном наследии, в написанных им научных трудах и книгах, а также в творческой деятельности высококвалифицированных специалистов, которых он воспитал и которым он передал свои знания.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ЗНАКОПЕРЕМЕННОЕ ТЕРМОСИЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОГОННЫМИ МОМЕНТАМИ

¹Старовойтов Э.И., ¹Леоненко Д.В., ²Абдусаттаров А.

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь

²Ташкентский государственный транспортный университет, г. Ташкент, Узбекистан

Посвящается 100-летию со дня рождения нашего учителя Виктора Васильевича Москвитина, доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Аннотация: Исследован изгиб трехслойной пластины при прямом и повторном знакопеременном нагружении круговой моментной нагрузкой. Физические уравнения состояния для материалов тонких внешних несущих слоев, учитывают возникающие малые упругопластические деформации. Материал более толстого жесткого заполнителя нелинейно упругий. Предполагается, что деформирование несимметричной по толщине пластины подчиняется гипотезам Кирхгофа в несущих слоях и гипотезе Тимошенко в заполнителе. Перпендикулярно ее верхнему слою падает тепловой поток. Торцы пластины и наружная поверхность нижнего несущего слоя теплоизолированы. Для расчета температурного поля используется формула, полученная методом усреднения теплофизических характеристик по толщине пакета. Учтено влияние температуры на модули упругости и функции нелинейности материалов. Постановка краевой задачи проведена вариационными методами. Ее решение получено методом упругих решений Ильюшина. При повторном знакопеременном нагружении использована теория переменного нагружения Москвитина. Проведен численный анализ полученных аналитических решений, исследована зависимость перемещений от физически нелинейных свойств материалов слоев, температуры.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина; пластичность; изгиб; циклическая моментная нагрузка; температура; численный анализ.

Введение. Актуальность разработки новых математических моделей для исследования упругого и неупругого деформирования композитных стержней, пластин и оболочек при термосиловых нагрузках, определяется их повсеместным распространением в транспортном машиностроении, строительстве и транспортировке энергоносителей. Физические уравнения состояния основываются на теории малых упругопластических деформаций [1]. При знакопеременных нагрузках упругопластических элементов конструкций применяется теория Москвитина [2, 3], учитывающая эффект Баушингера [4] и позволяющая сводить краевую задачу при знакопеременном нагружении к первоначальной задаче о прямом нагружении. О необходимости учета эффекта Баушингера, заключающегося в изменении механических свойств материалов после пластического деформирования, в частности микролегированных сталей и других металлах рассмотрены в работах [5–7]. Количественная оценка результатов экспериментального исследования этого эффекта в анизотропных металлах дана в статье [8].

Монографии [9–13] посвящены разработке механико-математических моделей деформирования слоистых упругих и неупругих элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Приведены постановки соответствующих задач, рассмотрены примеры решения и их численная апробация.

Работа [14] посвящена анализу колебаний трехслойных пластин по уточненной теории, в том числе с линейно вязкоупругими слоями. Статьи [15–18] посвящены исследованию квазистатического нелинейного деформирования трехслойных балок, пластин и оболочек.

Циклическому нагружению однородных и трехслойных упругопластических стержней с учетом повреждаемости посвящены работы [19, 20]. Знакопеременное нагружение трехслойных пластин с упругопластическими слоями под действием кольцевой нагрузки исследовано в [21, 22].

Цель, задачи и методика расчета. Целью работы является решение задачи о переменном изгибе трехслойной пластины погонной моментной нагрузкой в температурном поле. На основе вариационного принципа Лагранжа сформулирована краевая задача изгиба трехслойных пластин при исходном и знакопеременном нагружении. Аналитическое решение краевой задачи получено в итерациях с помощью метода упругих решений Ильюшина.

Постановка задачи. Нагружение из естественного состояния. Пусть интенсивность теплового потока q_t , падающего на внешнюю поверхность трехслойной несимметричной по толщине круговой пластины постоянна (рис. 1). При решении задачи теплопроводности предполагалось, что нижняя поверхность $z = -c - h_2$ и контур $r=1$ теплоизолированы. Тогда температурное поле $T(z)$ определяется с достаточной степенью точности по формуле [9]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где $\tau = at / H^2$; $s = z / H$; $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$; $H = h_1 + h_2 + h_3$, $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k \rho_k / H$; $a = \lambda / C$; коэффициенты λ_k – теплопроводности, C_k теплоемкости; ρ_k – плотность материала; $k=1, 2, 3$ номер слоя; t – время.

Все линейные перемещения, размеры пластины и радиальная координата отнесены к радиусу r_0 . При постановке задачи используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя, перпендикулярно которой ось z направлена вверх. Для несущих внешних достаточно тонких слоев, толщины которых $h_1 \neq h_2$, принимаются кинематические гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, перпендикулярности и несжимаемости деформированной нормали. В относительно толстом жестком заполнителе, толщиной $h_3=2c$, деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$, т.е. справедлива гипотеза Тимошенко.

На внешнюю поверхность верхнего слоя рассматриваемой пластины, вдоль окружности относительного радиуса $a \leq 1$ действует погонный момент, интенсивность которого M_0 (см. рис. 1). Его аналитический вид может быть следующим

$$q(r) = \delta(r-a),_r M_0 = -\frac{\delta(r-a)}{r} M_0, \quad (2)$$

где $\delta(r)$ – дельта функция Дирака, запятая в индексе обозначает производную по следующей за ней координате.

Нагрузка осесимметричная, поэтому окружные перемещения отсутствуют $u_\varphi^{(k)} = 0$, а искомые величины – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя u , относительный сдвиг ψ и прогиб пластины w зависят только от радиальной координаты и не зависят от φ . На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев ($\psi=0$ при $r=1$).

Радиальные перемещения, в силу принятых гипотез, изменяются по толщине слоев линейно:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя напряжения в слоях $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), $\sigma_{rz}^{(3)}$, вводятся обобщенные внутренние силы и моменты:

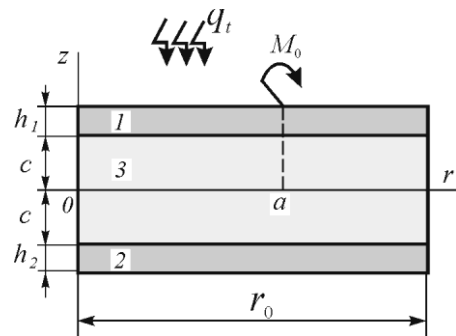


Рис. 1. Нагружение трехслойной пластины погонной моментной нагрузкой

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz. \quad (4)$$

Деформации следуют из соотношений Коши [9] и перемещений (3). Напряжения вычисляются через деформации с помощью соотношений теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T))e_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T^{(k)}), \\ s_{rz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T))e_{rz}^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \quad (5)$$

где $s_\alpha^{(k)}, e_\alpha^{(k)}, s_{rz}^{(3)}, e_{rz}^{(3)}$ – компоненты девиаторов и $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T), K_k(T)$ – термозависимые модули сдвига и объемного деформирования; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения.

Входящие в (5) функции пластичности $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$ в несущих слоях зависят от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(k)}$, предела текучести – $\varepsilon_y^{(k)}(T)$ и температуры. В соответствии с условием пластичности Мизеса, при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует $\omega_k = 0$. Подобным образом для функции нелинейности материала заполнителя предполагается, что $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) = 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$, где $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел нелинейности. Аналитический вид этих функций принимается следующий:

$$\omega_k(\varepsilon_u, T_0) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_{y0}^{(k)}, \\ A_k \left(1 - \frac{\varepsilon_{y0}^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)}} \right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_{y0}^{(k)}. \end{cases} \quad (6)$$

Например, для фторопласта-4 $A_3=0.905, \alpha_3=1.48, \varepsilon_s=3.3\%$; для сплава Д16-Т $A_1=0.96, \alpha_1=2.34, \varepsilon_{y0}(T_0)=0.735\%, T_0=293\text{ K}$ [9].

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получены вариационным методом Лагранжа с учетом работы касательных напряжений в заполнителе. При кольцевой нагрузке они приведены в [21]. В случае моментной нагрузки (2) они принимают вид:

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_r) = p_\omega, \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_r) - 2cG_3\psi = h_\omega, \quad (7) \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_r) = \frac{\delta(r-a)}{r}M_0 + q_\omega,$$

где a_i – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и толщины слоев при температуре T [21]; L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Нелинейные составляющие напряжений сгруппированы в правых частях системы (7) и входят в слагаемые с индексом "ω":

$$p_\omega = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega, \quad q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad (8)$$

где величины $T_{\alpha\omega}^{(k)}, M_{\alpha\omega}^{(k)}, H_{\alpha\omega}^{(k)}, Q_\omega$ ($\alpha=r, \varphi$) вычисляются по формулам (4), в которых следует напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ заменить их нелинейными составляющими $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$

$$\sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)e_{\alpha\omega}^{(k)} + 3K_k\alpha_kT^{(k)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T)e_{rz\omega}^{(3)}.$$

например

$$M_{\alpha\omega} = 2 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega_k e_{\alpha}^{(k)} z dz + \sum_{k=1}^3 3K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz.$$

Аналитическое итерационное решение краевой задачи. Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (7) необходимо применять приближенные или численные методы решений. Здесь воспользуемся методом упругих решений Ильюшина, в соответствии с которым система (7) переписывается в следующем итерационном виде:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) &= p_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) - 2cG_3 \psi^{(n)} &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) &= \frac{\delta(r-a)}{r} M_0 + q_{\omega}^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ в правых частях уравнений (9) служат поправками на нелинейность материалов слоев. Их называют дополнительными «внешними» нагрузками. На первом шаге приближения ($n=1$) они принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения, используя формулы, подобные (8):

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} e_{\alpha}^{(k,n-1)} dz + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} e_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}) \quad (\alpha = r, \varphi), \\ Q_{\omega}^{(n-1)} &= \int_{-c}^c 2G_3 \omega_3^{n-1} e_{r_z}^{(3,n-1)} dz, \quad \omega_k^{n-1} \equiv \omega_k(\epsilon_u^{(k,n-1)}, T^{(k)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Для замыкания краевой задачи к уравнениям (9) необходимо добавить условия ограниченности решения в центре пластины и граничные условия, например, при шарнирном опирании

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = 0, \quad M_r^{(n)} = M_{r\omega}^{(n-1)} \quad \text{при } r=1. \quad (11)$$

Полученная краевая задача на каждом шаге итерации является линейной. Решение подобной системы уравнений при упругом деформировании пластины ($n=1$) погонным моментом известно [9]. По аналогии выписываем решение, включающее дополнительные «внешние» нагрузки, которое является рекуррентным в задаче о деформировании трехслойной упругопластической пластины:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}, \\ w^{(n)} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(M_0) dr - \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_{\omega}^{(n-1)}) dr - \\ &\quad - \frac{C_1^{(n)}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)} \ln r + C_4^{(n)}, \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r}^{(n)} - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{C_7^{(n)} r}{2} + \frac{C_8^{(n)}}{r}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $I_1(\beta r)$, $K_1(\beta r)$ – функции Бесселя (модифицированная) и Макдональда; C_1, C_2, \dots, C_8 – константы интегрирования; L_2^{-1} , L_3^{-1} – интегральные операторы

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f(r) dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f(r) dr dr dr;$$

$$\beta^2 = \frac{2cb_3G_3}{b_1b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1a_6 - a_3^2}{a_1}.$$

Частное решение $\psi_r^{(n)}$ и интеграл от сдвига $\psi^{(n)}$ в (12)₁ будут

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)} = & \frac{\gamma_1 M_0}{\beta} H_0(a-r) \left(\frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r)(I_0(\beta a) + I_1(\beta a)\beta a) - -I_1(\beta r)(K_0(\beta a) - K_1(\beta a)\beta a) \right) + \frac{C_1^{(n)}\gamma_1}{\beta^2 r} - \\ & - K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + \\ & + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\ & \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int \psi^{(n)} dr = & \frac{C_2^{(n)} I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3^{(n)} K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 M_0}{\beta^2} H_0(a-r) \times \\ & \times \left(\ln\left(\frac{r}{a}\right) + I_0(\beta a) K_0(\beta r) - K_0(\beta a) I_0(\beta r) \right) - \\ & - \int \left(K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] \right) dr, \end{aligned}$$

$$\int L_3^{-1}(M_0) dr = \frac{M_0}{4} \left(2r^2 - 2a^2 - 3a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right) H_0(a-r). \quad (14)$$

Константы интегрирования следуют из требования ограниченности решения в начале координат и граничных условий на контуре (11).

Таким образом, при нагружении упругопластической трехслойной пластины погонным моментом прогиб $w^{(n)}(r)$, радиальное перемещение $u^{(n)}(r)$ и сдвиг в заполнителе $\psi^{(n)}(r)$ вычисляются по формулам (12)–(14). Температура входит в решение через константы интегрирования C_5, C_7 .

Следует отметить, что сходимость метода упругих решений доказана в достаточно широких пределах [1], а для материалов Д16-Т, фторопласт-4, используемых в дальнейшем, подтверждена в работе [9].

Численные результаты получены для пластины, слой которой выполнены из материалов Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Интенсивность силовой погонной нагрузки принята $M_0=0.3$ МН, толщины слоев – $h_1=0.02$; $h_2=0.06$; $h_3=0.4$. Параметры упругости и нелинейности, входящие в функцию пластичности (6), заимствованы из [9]. Температура при расчетах усреднялась по толщине пластины. Для описания зависимости параметров упругости от температуры использовалась формула Белла [23]. Результаты продемонстрировали достаточно быструю сходимость итерационного метода, уже 5-е приближение отличалось от 4-го менее чем 0.5 %.

На рисунке 2, a и b показано изменение сдвига в заполнителе и прогиба круговой трехслойной пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при радиусе моментной окруж-

ности $a=0.75$: 1, 2 – упругие и физически нелинейные при $T_1=293$ К; 3, 4 – упругие и физически нелинейные при $T_2=323$ К. При изотермическом нагружении учет физической нелинейности материалов слоев изменяет упругий прогиб на 14 %, повышение температуры на 30 приводит к его увеличению на 21 %.

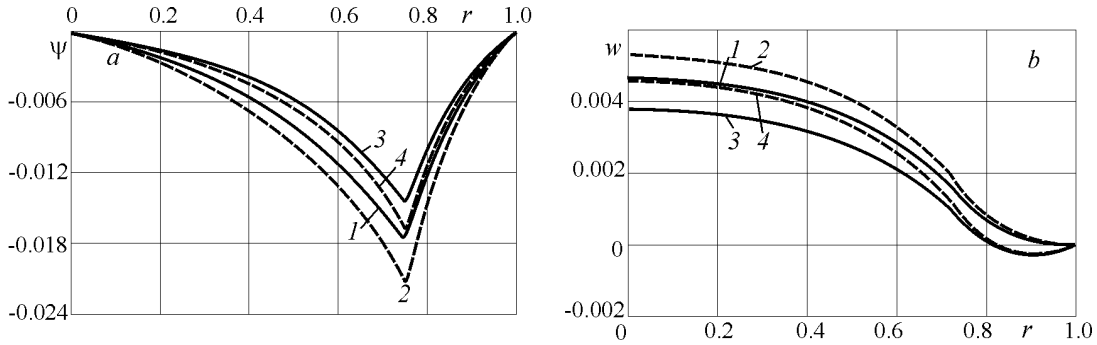


Рис. 2. Упругие и физически нелинейные перемещения при радиусе силовой окружности $a = 0.75$ ($T_1 = 293$ К, $T_2 = 323$ К)

У сдвигов наблюдаются максимумы в виде пиков примерно при $r=0.75$. Их величина при учете нелинейности материалов слоев уменьшается.

Повторный знакопеременный изгиб пластины. Пусть в момент времени $t=t_1$, происходит мгновенная разгрузка и нагружение пластины усилиями обратного знака:

$$q''(r) = \frac{\delta(r-a)}{r} M_0. \quad (15)$$

Принимается, что температура фиксируется $T_1(z) = T(z, t_1)$ и в дальнейшем не изменится во всех точках пластины. За счет нагрузки (15) в слоях возникнут деформации $\varepsilon_\alpha^{n(k)}$, напряжения $\sigma_\alpha^{n(k)}$, $\sigma_{rz}^{n(3)}$ и перемещения u'' , ψ'' , w'' . В соответствии с теорией Москвитина [2], примененной для слоистых пластин в [21], вводятся для указанных величин и нагрузок разности:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)*} &= \sigma_\alpha^{r(k)} - \sigma_\alpha^{n(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)*} = \sigma_{rz}^{r(3)} - \sigma_{rz}^{n(3)}, \quad s_\alpha^{(k)*} = s_\alpha^{r(k)} - s_\alpha^{n(k)}, \quad \sigma^{(k)*} = \sigma^{r(k)} - \sigma^{n(k)}, \\ \varepsilon_\alpha^{n(k)} &= \varepsilon_\alpha^{r(k)} - \varepsilon_\alpha^{(k)*}, \quad \varepsilon_{rz}^{n(3)} = \varepsilon_{rz}^{r(3)} - \varepsilon_{rz}^{(3)*}, \quad e_\alpha^{n(k)} = e_\alpha^{r(k)} - e_\alpha^{(k)*}, \quad \varepsilon^{n(k)} = \varepsilon^{r(k)} - \varepsilon^{(k)*}, \\ \psi'' &= \psi' - \psi^*, \quad u'' = u' - u^*, \quad w'' = w' - w^*, \end{aligned} \quad (16)$$

$$q^*(r) = q(r) - q''(r) = \frac{2\delta(r-a)}{r} M_0,$$

где один штрих отмечает величины перед разгрузкой, т.е. полученные при нагружении из естественного состояния.

Для перемещений и деформаций со звездочками выполняются соотношения Коши. Напряжения определяются через деформации соотношениями типа (5):

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)*} &= 2G_k(1-\omega_k^*)e_\alpha^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = 3K_k\varepsilon^{(k)*}, \\ s_{rz}^{(3)*} &= 2G_3(1-\omega_3^*)e_{rz}^{(3)*} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (17)$$

где параметры упругости $G_k(z)=G_k(T_1(z))$, $K_k(z)=K_k(T_1(z))$ – зафиксированы в момент разгрузки.

По сравнению с соотношениями (5) температура в явном виде в (17) не входит. Используя гипотезу Москвитина, полагаем, что функции пластичности и физической нелинейности со звездочками в (17) подобны соответствующим функциям при нагружении из естественного состояния (6), но с другими константами. Для дюралюминия это $A_1^* = 0.924$, $\alpha_1^* = 2.27$, $\varepsilon_{y1}^*(T_1) = \beta_1 \varepsilon_{y1}(T_1)$, $\beta_1 = 2.02$ [9]. Материал заполнителя считается нелинейно упругим, поэтому его параметры при знакопеременном нагружении не изменяются.

Проведя процедуру постановки краевой задачи для величин со звездочками, подобную нагружению из естественного состояния, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений похожую по виду на (7). Краевая задача для перемещений со звездочками $u^{(n)*}(r)$, $\psi^{(n)*}(r)$, $w^{(n)*}(r)$ замыкается присоединением к системе уравнений равновесия граничных условий типа (11). Ее решение строится методом упругих решений.

Итерационное решение задачи формально следует из решения (12), в котором нужно нагрузку и функции физической нелинейности заменить соответствующими величинами со звездочками:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)*} &= C_2^{(n)*} I_1(\beta r) + C_3^{(n)*} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)*}, \\ w^{(n)*} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)*} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(M^*) dr - \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)*}) dr - \\ &\quad - \frac{C_1^{(n)*}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)*} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)*} \ln r + C_4^{(n)*}, \\ u^{(n)*} &= \frac{a_3}{a_1} w^{(n)*}, r - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)*} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) + \frac{C_7^{(n)*} r}{2} + \frac{C_8^{(n)*}}{r}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $C_1^{(n)*} - C_8^{(n)*}$ – константы интегрирования, частное решение $\psi_r^{(n)*}$, интегралы от сдвига $\psi^{(n)*}$ и нагрузки M^* вычисляются по формулам (13), (14), в которых необходимо ввести в дополнительных нагрузках звездочки, исключить в $C_5^{(n)*}$ температуру и заменить M^* на $2M_0$.

После этого искомые перемещения, деформации и напряжения в рассматриваемой пластине при повторном знакопеременном нагружении определяются из соотношений (16), (12), (18), например:

$$u'' = u' - u^*, \quad \psi'' = \psi' - \psi^*, \quad w'' = w' - w^*.$$

На рис. 3 показано изменение прогиба a и относительного сдвига в заполнителе b вдоль радиуса пластины при повторном знакопеременном изгибе погонными моментами $M_0=0.3$ МН: 1 – упругая пластина, 2 – изотермическая упругопластичность, 3 – термоупругопластичность. Здесь после перемены знака нагрузки максимальная величина перемещений несколько уменьшается, как и ранее [21], вследствие циклического упрочнения материалов несущих слоев.

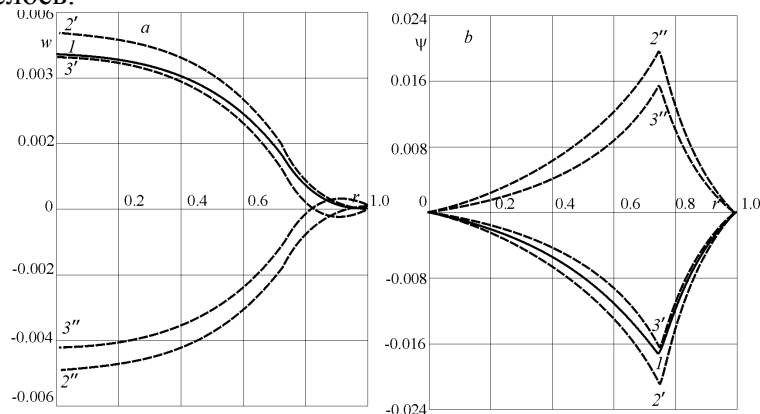


Рис. 3. Перемещения при переменном изотермическом и термосиловом нагружениях погонной поперечной моментной нагрузкой ($T_1 = 293$ К, $T_2 = 323$ К)

Заключение. Рассмотренная методика решения краевых задач для трехслойных упругопластических пластин позволяет строить аналитическое решение при перемене знака погонной моментной нагрузки после пластического деформирования в температурном поле. Полученные аналитические результаты позволили провести численный анализ, кото-

рый подтвердил быструю сходимость итерационного метода, основанного на методе упругих решений, отметил существенное влияние пластичности материалов слоев и температуры на НДС в пластине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда фундаментальных исследований БРФФИ (проект № T22УЗБ-015).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин А.А.* Труды. Пластичность. М: Логос, 2004. – 388 с.
- [2] *Москвитин В.В.* Циклическое нагружение элементов конструкций. М: URSS, 2019. – 344 с. (переиздание)
- [3] *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М: URSS, 2019. – 327 с. (переиздание) 4,
- [4] *Bauschinger I.* Über die Quercontraktion und Dilatation bei der Langenausdehnung und Zusammendruckung pristiatischer Körper // *Civilingenieur.* 1879. Vol. 25. S.81–124.
- [5] *Kostrzyzhev A.G., Strangwood M., Davis C.L.* Bauschinger Effect in microalloyed Steels: Part II. Influence of Work Softening on Strength Development During UOE Line-Pipe Forming // *Metallurgical and materials transactions A.* 2011. Vol. 42A. No.10. P.3170–3177.
- [6] *Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гултыяев В.И.* Исследование эффекта Баушингера и границы текучести при упруго-пластическом деформировании металлов // *Вестник ПНИПУ Механика.* 2013. №1. С.94–105.
- [7] *Абиров Р.А.* Развитие математических моделей пластичности с учетом деформирования материалов при сложном нагружении: Автореф ... дис.докт. физ.-мат. наук. Ташкент, 2014. – 52 с.
- [8] *Мерсон Д.Л., Васильев Е.В., Виноградов А.Ю.* Количественная оценка эффекта Баушингера в магниевых сплавах с эффектом асимметрии // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* 2017. Т. 83. №3. С.55–58.
- [9] *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. Москва. ФИЗМАТЛИТ, 2005, –576 с.
- [10] *Старовойтов Э.И. Леоненко Д.В., Рабинский Л.Н.* Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней. Москва. Изд-во МАИ, 2016, – 184 с.
- [11] *Журавков М.А., Старовойтов Э.И.* Математические модели механики твердого тела. Минск. БГУ, 2021, –535 с.
- [12] *Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M.* Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications. Academic Press, 2016, – 410 p.
- [13] *Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I.* Mechanics of Solid Deformable Body. Singapore. Springer, 2023, –317 p.
- [14] *Starovoitov É.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V.* Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads // *Strength of materials.* 2002. Vol.34. No.5. P.474–481.
- [15] *Паймушин В.Н.* Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму // *Прикладная математика и механика.* 2018. Т. 82. № 1. С.44–57.
- [16] *Belinha J., Dints L.M.* Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method // *Composite Structures.* 2007. Vol.78. No.3. P.337-350.
- [17] *Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A.* Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels // *Materials Sciences and Applications.* 2013. Vol.4. No.8. P.471–477.
- [18] *Pronina P.F., Tushavina O.V., Starovoitov E.I.* Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects // *Periódico Tchê Química.* 2020. Vol. 17. No.35. Pp.753–764.
- [19] *Старовойтов Э.И., Абдусаттаров А., Рузиева Н.Б.* Циклическое нагружение упругопластических трёхслойных стержней с учетом их повреждаемости // *Узб. журнал Проблемы механики.* 2023. № 1. С. 66–74.
- [20] *Абдусаттаров А., Исомиддинов А.И., Рузиева Н.Б.* Упругопластический расчет тонкостенных стержней при переменном нагружении с учетом повреждаемости // *Узб. журнал «Проблемы механики».* 2021. № 2. С. 3 – 16.
- [21] *Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А.* Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузкой // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2022. Т.28. №3. С. 339–358.
- [22] *Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б.* Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях. Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
- [23] *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых тел. Ч. 1. Москва. Наука, 1984, – 600 с.

Дата поступления
18.06.2023

Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А. Уч қатламли пластинканинг ўзгарувчан термик ва погонли момент таъсирида такрорий юкланиши

Аннотация: Мақолада доиравий момент таъсирида бир мартали ва қайта такрорий юкланишларда уч қатламли пластинка эгилишига тадқиқ қилинган. Физик ҳолат тенгламаси ташиқи юк кўтарувчи қатламнинг эластик-пластик деформацияланишини ҳисобга олади. Нисбатан қалин қаттиқ тўлдирувчининг материали чизиқсиз эластик. Қалинлиги бўйича носимметрик юк кўтарувчи қатлам Кирхгоф гипотезаси бўйича, тўлдирувчи эса Тимошенко гипотезаси бўйича деформацияланади деб қабул қилинади. Ташиқи қатламга тик ҳолатда иссиқ оқим тушади. Пластинка чегараси ва куйи қатлам ташиқи сирти иссиқлик жиҳатдан изоляцияланган. Температурани таъсирини ҳисоблаш учун физик иссиқлик параметрларини пластинкани қалинлиги бўйича ўртачалаштириши усули асосида олинган формулалардан фойдаланилган. Температурани эластиклик модулига ва материалнинг ночизиқли характеристикаларига таъсири эътиборга олинган. Вариацион усуллар асосида чегаравий масалалар қўйилган. Унинг ечими Ильюшиннинг эластик ечими усулида олинган. Ўзгарувчан юкланишлар таъсирини текширишида Москвитиннинг такрорий юкланишлар назариясидан фойдаланилган. Олинган аналитик ечимлар сонли таҳлил қилиниб, кўчирининг материал физик ночизиқли хоссаларига ва температурага боғлиқлиги тадқиқ этилган.

Калим сўзлар: доиравий уч қатламли пластинка; эластиклик; эгилиши; циклик момент юкланиши; температура; сонли таҳлил.

Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Abdusattarov A. Alternating thermal force loading three-layer plate with linear torque load

Abstract: The bending of a three-layer plate under direct and repeated alternating loading by a circular torque load is investigated. The physical equations of state for materials of thin outer bearing layers take into account the small elastic-plastic deformations that occur. The material of the thicker rigid filler is non-linearly elastic. It is assumed that the deformation of the plate, which is asymmetric in thickness, obeys the Kirchhoff hypotheses in the bearing layers and the Timoshenko hypothesis in the filler. The heat flow falls perpendicular to its upper layer. The end face of the plate and the outer surface of the lower bearing layer are thermally insulated. To calculate the temperature field, the formula obtained by averaging the thermophysical characteristics over the thickness of the package is used. The influence of temperature on the elastic modulus and the nonlinearity functions of materials is taken into account. The formulation of the boundary value problem was carried out by variational methods. Its solution is obtained by the Ilyushin elastic solutions method. In case of repeated alternating loading, Moskvitin's theory of alternating loading was used. The numerical analysis of the obtained analytical solutions is carried out, the dependence of the displacements on the physically nonlinear properties of the layer materials and temperature is investigated.

Keywords: three-layer round plate; plasticity; cyclic torque load; bending; temperature; numerical analysis

УДК 531.01

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СТАТИЧЕСКИ НЕСБАЛАНСИРОВАННОГО РОТОРА В РАМКАХ МОДЕЛИ ДЖЕФФКОТТА

¹Сидиков М.Н., ²Тўражонов К.М.

¹НИТУ «МИСиС», Алмалыкский филиал, Алмалык, Узбекистан

²Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан

E-mail: ¹mansur106@mail.ru, ²q.turajonov@gmail.com

Аннотация: В рамках модели Джеффкотта исследуется вопрос существования стационарных движений ротора, установленного на гибком валу с шаровым автобалансирующим устройством (АБУ), когда беговые дорожки балансируемых шариков установлены не только эксцентрично, но и обладают горизонтальной осью вращения. Такая постановка задачи позволяет учитывать также и малые угловые погрешности при установке автобалансирующего устройства. С помощью пакета программ получен график зависимости между амплитудой движения центра масс ротора и угловой скоростью ротора в стационарном движении.

Ключевые слова: автобалансирующая система; эксцентриситет; угловая погрешность.

Введение. Как известно, имеются два распространенных способа балансировки несбалансированных роторов: активный и пассивный. В последнее время научные исследования посвящены в основном пассивной балансировке с помощью подвижных масс. Особенностью пассивной балансировки является то, что в зависимости от угловой скорости ротора подвижные массы занимают определенное положение, балансируя ротор. Особенно актуален вопрос прохождения ротора через критическую угловую скорость, которая характеризуется достаточным увеличением амплитуды колебаний центра масс ротора. В работах [1–4] рассмотрены вопросы динамики статически и динамически несбалансированного ротора, установленного на гибком валу с шаровым автобалансирующим устройством, с учетом погрешности (эксцентриситета) при установке. При этом беговые дорожки представляют собой круговые или эллиптические траектории. В рамках модели Джеффкотта получены уравнения движения в лагранжевых переменных. В системе координат, связанной с вращающимся ротором, найдены условия стационарности движения, а также проделан анализ полученных уравнений. При конкретных значениях параметров системы численным методом получены графики изменения амплитуды колебаний ротора при прохождении ротора через критическую скорость при постоянном значении углового ускорения, а также момента. Рассмотрен вопрос устойчивости стационарных движений, соответствующих полубалансированному и несбалансированному режимам, получены достаточные условия устойчивости по первому приближению. Показано, что если беговые дорожки представляют собой эллипсы, то полностью сбалансированный режим движения ротора отсутствует.

Математическая модель. Рассматривается модель ротора в виде абсолютно твердого цилиндра, закрепленного по вертикальной продольной оси с помощью упругого вала на двух опорах (рис.1). В качестве математической модели принимается модель, рассмотренная в работах [1–4], с дополнением, что круговые беговые линии (трубки) могут

совершать вращательное движение вокруг одной определенной горизонтальной оси, что позволяет в частном случае исследовать влияние угловой погрешности АБУ при установке. При этом предполагается, что ротор представляет собой цилиндр небольшой высоты и совершает плоское движение (в рамках модели Джеффкотта). Для определения положения АБУ относительно ротора введем следующие обозначения (рис.1). Расстояние между геометрическим центром O и центром тяжести G цилиндра (эксцентриситет) обозначим через s_1 . Расположение АБУ определяется параметром $s_2=OO_1$ (расстояние между центром балансировочного устройства и точкой пересечения вала), а также углом $\gamma=\angle O_1OG$ между направлениями OO_1 и OG . Угол между горизонтальной осью вращения трубки и направлением OO_1 обозначим через β .

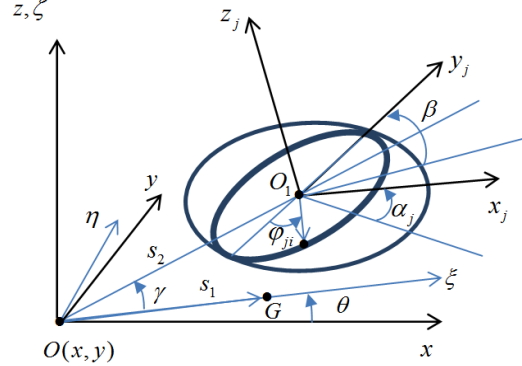


Рис. 1. Ротор с балансировочной системой

Для определения положения механической системы введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с осью Oz , проходящей через точки опоры. Оси Ox , Oy лежат в плоскости статического эксцентриситета. Введем также подвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$, вращающуюся вместе с ротором, где ось $O\zeta$ совпадает с осью Oz . Для определения относительного движения беговых дорожек и балансировочных шариков введем подвижные координатные системы $O_1x_jy_jz_j$, связанные с трубками, начало которых расположено в центре балансировочной системы O_1 . Оси O_2y_j направлены вдоль горизонтальной оси вращения трубок, а оси O_1x_j и O_1z_j образуют правую систему координат.

Рассматриваемая механическая система обладает $k=s(n+1)+3$ степенями свободы. Действительно, x, y – координаты центра масс ротора относительно координатной системы, $Oxyz$ θ – угол поворота ротора вокруг вертикальной оси, $\alpha_j(j=1, \dots, s)$ – углы наибольшего наклона плоскости трубок относительно плоскости $Oxyz$. Для определения положения шариков внутри трубки введены углы φ_{ji} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, s$) – между осью O_1y_j , проходящей через центр беговых окружностей, и радиусами $O_1\vec{M}_{ji}$, проведенными из центра окружности к шарикам. Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий ротора, балансировочного устройства и балансировочных шариков.

$$T = T_p + T_{\sigma c} + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n T_{M_{ji}}, \text{ где } T_p = \frac{1}{2} m_p \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2,$$

$$T_{\sigma c} = \frac{1}{2} m_p \vec{v}_{O_1}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (J_{x_j} \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha_j + J_{y_j} \dot{\alpha}_j^2 + J_{z_j} \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha_j), \quad T_{M_{ji}} = \frac{1}{2} m_{ji} (\vec{v}_{O_1} + [(\dot{\theta} + \dot{\alpha}_j) \times O_1 \vec{M}_{ji}])^2$$

Для исследования стационарных движений ротора при вращении с постоянной собственной угловой скоростью напишем уравнения движения в системе координат, вращающейся вместе с ротором [2], то есть сделаем замену переменных

$$z = x + iy = (\xi + i\eta)e^{i\theta}. \quad (1)$$

Во вращающейся системе координат уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} M(\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 - \eta\ddot{\theta}) + c(\dot{\xi} - \eta\dot{\theta}) + k\xi = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \{ [m_{\rho} s_1 + (m_{\sigma c} + m_u) s_2 \cos \gamma + \\ + m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \sin \varphi_{ji} \sin \Delta - \cos \varphi_{ji} \cos \Delta)] \dot{\theta}^2 - m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \cos \varphi_{ji} \cos \Delta - \sin \varphi_{ji} \sin \Delta) \dot{\varphi}_{ji} \dot{\theta} + \\ + m_{ju} r_j \sin \alpha \sin \varphi_{ji} \cos \Delta \dot{\alpha}_j \dot{\theta} + [(m_{\sigma c} + m_u) s_2 \sin \gamma - m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \sin \varphi_{ji} \cos \Delta + \cos \varphi_{ji} \sin \Delta)] \ddot{\theta} - \\ - r_j m_{ji} (A_1 \cos \Delta - B_1 \sin \Delta) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(\ddot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta}) + c(\dot{\eta} + \xi\dot{\theta}) + k\eta = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \{ & [(m_{\delta c} + m_{uu})s_2 \sin \gamma - m_{ji}r_j (\cos \alpha_j \sin \varphi_{ji} \cos \Delta + \\
& + \cos \varphi_{ji} \sin \Delta)]\dot{\theta}^2 - m_{ji}r_j (\cos \alpha_j \cos \varphi_{ji} \sin \Delta + \sin \varphi_{ji} \cos \Delta)\dot{\varphi}_{ji}\dot{\theta} + m_{ji}r_j \sin \alpha_j \sin \varphi_{ji} \sin \Delta \dot{\alpha}_j \dot{\theta} + \\
& [-m_{\rho} s_1 - (m_{\delta c} + m_{uu})s_2 \cos \gamma - m_{ji}r_j (\cos \alpha_j \sin \varphi_{ji} \sin \Delta - \cos \varphi_{ji} \cos \Delta)]\ddot{\theta} - r_j m_{ji} (A_1 \sin \Delta + B_1 \cos \Delta)\}, \\
m_{ji}r_j^2 \ddot{\varphi}_{ji} + m_{ji}r_j [& ((\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 - \eta\ddot{\theta})\cos \Delta + (\ddot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta})\sin \Delta) \sin \varphi_{ji} + \\
& + (\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 - \eta\ddot{\theta})\sin \Delta - (\ddot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 - \xi\ddot{\theta})\cos \Delta) \cos \alpha_j \cos \varphi_{ji}] - m_{ji}r_j^2 (1 - \cos 2\varphi_{ji}) \sin \alpha_j \dot{\alpha}_j \dot{\theta} + \\
& + m_{ji}[s_2 r_j (\sin \varphi_{ji} \sin \beta - \cos \varphi_{ji} \cos \beta \cos \alpha_j) + r_j^2 \cos \alpha_j] \ddot{\theta} - m_{ji}[s_2 r_j (\sin \beta \cos \varphi_{ji} \cos \alpha_j + \sin \varphi_{ji} \sin \beta) - \\
& - \frac{r_j^2}{2} \sin^2 \alpha_j \sin 2\varphi_{ji}] \dot{\theta}^2 - m_{ji}r_j^2 \sin \varphi_{ji} \cos \varphi_{ji} \dot{\alpha}_j^2 = -m_{ji}g r_j \cos \varphi_{ji} \sin \alpha_j - c_{\varphi} \dot{\varphi}_{ji}, (i = 1 : n)
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} ((m_{ji}r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji} + J_{y_2}) \dot{\alpha}_j) - m_{ji} [& ((\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 - \eta\ddot{\theta})\sin \Delta - (\ddot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta})\cos \Delta) \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j - \right. \\
& - m_{ji}r_j^2 (\cos 2\varphi_{ji} - 1) \sin \alpha_j \dot{\theta} \dot{\varphi}_{ji} + m_{ji}r_j (s_2 \sin \varphi_{ji} \cos \beta - r_j \sin \varphi_{ji} \cos \varphi_{ji}) \sin \alpha_j \ddot{\theta} - \left. \left[\frac{1}{2} (J_{x_2} - J_{z_2}) \sin 2\alpha_j - \right. \right. \\
& \left. \left. - m_{ji} (s_2 r_j \sin \beta \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j + r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji} \sin \alpha_j \cos \alpha_j) \right] \dot{\theta}^2 + c_{\alpha} \dot{\alpha}_j + m_{ji} g r_j \sin \varphi_{ji} \cos \alpha_j \right\} = 0, (j = 1 : s),
\end{aligned}$$

$$\text{где } A_1 = \cos \varphi_{ij} \dot{\varphi}_{ij}^2 + \sin \varphi_{ij} \ddot{\varphi}_{ij} + (\cos \varphi_{ij} \cos \alpha_j \dot{\varphi}_{ij} - \sin \alpha_j \sin \varphi_{ij} \dot{\alpha}_j) \dot{\theta}, \quad B_1 = \cos \alpha_j \sin \varphi_{ij} \dot{\varphi}_{ij}^2 + \\
+ 2 \sin \alpha_j \cos \varphi_{ij} \dot{\varphi}_{ij} \dot{\alpha}_j + \cos \alpha_j \sin \varphi_{ij} \dot{\alpha}_j^2 - \cos \alpha_j \cos \varphi_{ij} \ddot{\varphi}_{ij} + \sin \varphi_{ij} \dot{\varphi}_{ij} \dot{\theta} + \sin \alpha_j \sin \varphi_{ij} \ddot{\alpha}_j,$$

m_{ρ} , $m_{\delta c}$, m_{ji} – соответственно массы ротора, балансировочной системы и шарика, J_{x_2} , J_{y_2} , J_{z_2} – моменты инерции балансировочной системы относительно главных осей инерции.

Стационарному движению системы соответствуют следующие значения переменных:

$$v = \dot{\theta} = \text{const}, \quad \xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \varphi_{ji} = \varphi_{ji}^0 \tag{3}$$

Подставляя (3) в систему уравнений (2), и при этом деля обе стороны уравнений на величину v^2 , получим систему трансцендентных уравнений.

$$(k/v^2 - M)\xi_0 + \frac{c}{v}\eta_0 = \left[\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{\rho} s_1 + (m_{\delta c} + m_{ij})s_2 \sin \gamma + m_{ij}r_i (\cos \alpha_j^0 \sin \varphi_{ji}^0 \sin \Delta - \cos \varphi_{ji}^0 \cos \Delta) \right].$$

$$(k/v^2 - M)\eta_0 + \frac{c}{v}\xi_0 = \left[\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n (m_{\delta c} + m_{ij})s_2 \sin \gamma - m_{ij}r_i (\cos \alpha_j^0 \sin \varphi_{ji}^0 \cos \Delta + \cos \varphi_{ji}^0 \sin \Delta) \right]. \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
& [(\xi_0 (\cos \delta \sin \varphi_{ji}^0 + \sin \delta \cos \alpha_j^0 \cos \varphi_{ji}^0) + \eta_0 (\sin \delta \sin \varphi_{ji}^0 - \cos \delta \cos \alpha_j^0 \cos \varphi_{ji}^0))] + \\
& + [s_2 (\sin \beta \cos \varphi_{ji}^0 \cos \alpha_j^0 + \sin \varphi_{ji}^0 \sin \beta) - \frac{r}{2} \sin^2 \alpha_j^0 \sin 2\varphi_{ji}^0] = \tilde{g} \cos \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0, (i = 1 : n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \{ m_{ji} (\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) \sin \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 - \left[\frac{1}{2} (J_{x_2} - J_{z_2}) \sin 2\alpha_j^0 - m_{ji} (s_2 r_j \sin \beta \sin \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 + r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 \cos \alpha_j^0) \right] + \\
+ m_{ji} \tilde{g} r_j \sin \varphi_{ji}^0 \cos \alpha_j^0 \} = 0, (j = 1 : s), (\Delta = \gamma + \beta),
\end{aligned}$$

В общем случае нахождение значений переменных представляет собой трудную задачу.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Предположим, что имеется одна беговая дорожка и в каждой дорожке расположены по два балансировочных шарика. Из уравнений стационарности движений (4) для переменных φ_1^0, φ_2^0 получим

$$\begin{aligned}
& \xi_0 (\cos \Delta \sin \varphi_1^0 + \sin \Delta \cos \alpha \cos \varphi_1^0) + \eta_0 (\sin \Delta \sin \varphi_1^0 - \cos \Delta \cos \alpha \cos \varphi_1^0) + \\
& + s_2 (\sin \beta \cos \varphi_1^0 \cos \alpha + \sin \varphi_1^0 \sin \beta) - \frac{r}{2} \sin^2 \alpha \sin 2\varphi_1^0 = \tilde{g} \cos \varphi_1^0 \sin \alpha,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\xi_0(\cos \Delta \sin \varphi_2^0 + \sin \Delta \cos \alpha \cos \varphi_2^0) + \eta_0(\sin \Delta \sin \varphi_2^0 - \cos \Delta \cos \alpha \cos \varphi_2^0) + \\ + s_2(\sin \beta \cos \varphi_2^0 \cos \alpha + \sin \varphi_2^0 \cos \beta) - \frac{r}{2} \sin^2 \alpha \sin 2\varphi_2^0 = \bar{g} \cos \varphi_2^0 \sin \alpha.$$

Для последующего анализа условий стационарности преобразуем систему (5), решая её относительно ξ_0, η_0 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} (\xi_0 \cos \alpha \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} + s_2 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} \cos \alpha \cos \gamma - r \sin^2 \alpha [\sin \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} + \\ + \cos \Delta \cos \alpha \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2}]) = \bar{g} \sin \alpha \sin \Delta \sin \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}, \\ \sin \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} (\eta_0 \cos \alpha \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} + s_2 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} \cos \alpha \sin \gamma + 2r \sin^2 \alpha [\cos \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} - \\ - \sin \Delta \cos \alpha \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2}]) = -\bar{g} \sin \alpha \cos \Delta \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} \sin \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Уравнения (6) допускают два вида решений. Для первого вида имеет место равенство $\sin((\varphi_1^0 - \varphi_2^0)/2) = 0$, из которого получаем решение $\varphi_1^0 - \varphi_2^0 = 2k\pi$, то есть шарики находятся вместе на беговой дорожке. Для второго вида решения имеют место соотношения

$$\xi_0 + s_2 \cos \gamma - r \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha [\sin \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} + \\ + \cos \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2}] / \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} = \bar{g} \operatorname{tg} \alpha \sin \Delta, \\ \eta_0 + s_2 \sin \gamma + 2r \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha [\cos \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} - \\ - \sin \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2}] / \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} = -\bar{g} \operatorname{tg} \alpha \cos \Delta.$$

В научных публикациях [3-10] стационарные движения второго типа с учетом малости ξ_0, η_0 называют полубалансированным движением с остаточным дисбалансом.

Таким образом, в первом случае $\sin((\varphi_1^0 - \varphi_2^0)/2) = 0$ или $\varphi_1^0 - \varphi_2^0 = 2k\pi$, то есть шарики будут располагаться по беговой дорожке вместе, а второй случай соответствует полубалансированному движению ротора с остаточным дисбалансом. Для определения угла наклона дорожки для стационарного режима первого типа обратимся к уравнению по отношению к углу α . Учитывая, что в каждой дорожке имеется по два балансировочных шарика, из (4) получим

$$[(\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta)(m_1 + m_2)r_1 \sin \varphi_1 \sin \alpha - [\frac{1}{2}(J_{x_2} - J_{z_2}) \sin 2\alpha - (s_2 \sin \beta (m_1 + m_2)r_1 \sin \varphi_1 \sin \alpha + \\ + (m_1 + m_2)r_1^2 \sin^2 \varphi_1 \sin \alpha \cos \alpha]] = -\sum_{i=1}^n \bar{g}(m_1 + m_2)r_1 \sin \varphi_1 \cos \alpha,$$

или, вводя обозначения $N_1 = r_1(m_1 + m_2) \sin \varphi_1$, $N_2 = r_1(m_1 + m_2) \cos \varphi_1$, $N_3 = r_1^2(m_1 + m_2) \sin^2 \varphi_1$, имеем

$$(\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta)N_1 \sin \alpha - [\frac{1}{2}(J_{x_2} - J_{z_2}) \sin 2\alpha - (s_2 \sin \beta \sin \alpha N_1 + N_3 \sin \alpha \cos \alpha)] = -\bar{g} \cos \alpha N_1,$$

Исключая неизвестные ξ_0, η_0 с помощью первых двух уравнений (4), получим

$$[m_p s \sin(\gamma + \bar{\alpha}) + m_{\sigma c} s_2 \sin(\beta + \bar{\alpha}) + N_1 \cos \alpha \cos \bar{\alpha} - N_2 \sin \bar{\alpha}] N_1 \sin \alpha - \\ - [(J_{x_2} - J_{z_2}) \cos \alpha - (s_2 \sin \beta N_1 + \cos \alpha N_3)] \sin \alpha = -A \bar{g} \cos \alpha N_1, \quad (7)$$

где $\sigma = A \cos \bar{\alpha}$, $\omega = A \sin \bar{\alpha}$, $A = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$, $\operatorname{tg} \bar{\alpha} = \frac{\omega}{\sigma} = \frac{c v}{k - M v^2}$, $\sigma = \frac{k}{v^2} - M$, $\omega = \frac{c}{v}$.

Отсюда видно, что вопрос осуществимости стационарного движения первого вида сводится к решению параметрического трансцендентного уравнения (7) и с точки зрения аналитической механики представляет собой однопараметрическое многообразие по отношению к обобщенным координатам.

Результаты исследований. В общем случае, нахождение аналитического решения уравнения (7) представляет собой трудную задачу. С помощью пакета программ при конкретных значениях параметров системы ($m_p=8\text{кг}$, $m_{I1}=0.005\text{кг}$, $m_{I2}=0.005\text{кг}$, $s_1=0.005\text{м}$, $s_2=0.004\text{м}$, $\gamma=0.314\text{рад}$, $\beta=1.57\text{рад}$) получен график зависимости амплитуды движения ротора от угловой скорости вращения ротора (рис.2).

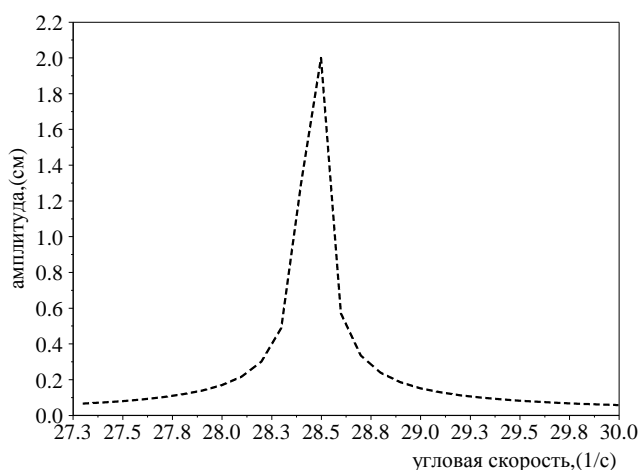


Рис.2. Амплитудная характеристика для стационарного движения первого вида.

Из графика изменения амплитуды ротора видно, что при значении угловой скорости равной $v=28,5$ имеет место резонанс, а за критической областью изменения v амплитуда ротора постепенно уменьшается.

Заключение.

1. Получены уравнения движения ротора с АБУ в подвижной системе координат, вращающейся вместе с ротором.
2. В результате анализа стационарных движений для данной модели показано, что одно из расположений шариков недопустимо.

3. С помощью пакета программ получен

график зависимости амплитуды центра масс ротора от угловой скорости.

4. Для достаточно малых угловых погрешностей установки АБУ получены координаты центра масс ротора для стационарного движения второго типа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быков В.Б., Мельников А.Б. Математическая модель гибкого ротора на основе обобщенных лагранжевых координат // Вестник СПбГУ. 2010, Сер.1, Вып.4, С.110–118
- [2] Быков В.Г., Ковачев А.С. Динамика статически неуравновешенного ротора с эллиптическим шаровым автобалансирующим устройством // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019, Т.6(64), Вып.3, С. 452–462.
- [3] Пасинкова И.А., Степанова П.П., Прецессии неуравновешанного ротора Джеффкотта в массивно-податливых опорах // Вестник СПбГУ. 2011, Сер.1, Т.1, Вып.1, С. 134–141.
- [4] Ковачев А.С. Балансировка динамически неуравновешенного ротора с учетом неидеальности АБУ // Вестник СПбГУ. Математика, Механика, Астрономия. 2015, Серия 1, №4, С. 606–616.
- [5] Гончаров В.В., Филлимонихин Г.Б. Вид и структура дифференциальных уравнений движения и процесса уравнивания роторной машины с автобалансирами. Известия Том.политехн. ун-та.2015. Т. 326, № 12. – С. 20–30.
- [6] Зайцев Н.Н, Зайцев Д.Н, Макаров А.А. Инженерный анализ установившихся режимов однодискового ротора с многорядным шаровым автобалансирующим устройством. Вестник ПНИГПУ. Аэрокосмическая техника. 2017. № 48. С. 43-59.
- [7] Ryzhik B., Sperling L., Duckstein.H. Auto-balancingofanisotropically support- ed rigid rotors. Technische Mechanik. 2004. № 24. P. 37–50.
- [8] Кадырбекулы А.В., Ибраев Г.Е. Об автоколебаниях в вертикальных роторных системах, установленных на упругих опорах. Journal of Mathematics, Machanics, Computer Science. №1(105), 2020.
- [9] Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И., Динамика роторов на упругих опорах. М.: Наука. 1972. –280 стр.
- [10] Никифоров А.Н. Состояние проблемы уравнивания роторов. Вестник научно технического развития. № 4 (68). 2013.

Дата поступления
15.06.2023

Сидиков М.Н., Тўражонов Қ.М. Джеффкотт моделига асосланган статик балансирилмаган роторни стационар ҳаракатларини таҳлили

Аннотация: Джеффкотт моделига асосланган ҳолда, шарчали балансирилаш мосламасига эга эластик ўққа ўрнатилган роторни стационар ҳаракатлари таҳлил қилинган. Бунда балансирилаш мосламаси геометрик марказдан кичик оғиш билан ўрнатилган ва шарчаларни ҳаракат йўлқалари маълум горизонтал ўқ атрофида ҳаракатланади деб қаралган. Масалани бундай қўйилиши кичик бурчак оғишларини ҳисобга олиш имконини беради. Дастурлаш пакети ёрдамида стационар ҳаракатда масса маркази амплитудасини билан бурчак тезлик орасидаги ўзаро боғлиқлигига тегишли график олинган.

Калим сўзлар: автобалансириловчи мослама; бурчак оғиши; марказдан оғиш.

Sidikov M.N., Turajonov K.M. Analysis of stationary motions of a statically unbalanced rotor in terms of the Jeffcott model.

Abstract: The question of the existence of stationary movements of the rotor mounted on a flexible shaft with a ball auto-balancing device (ABD) is investigated, when the raceways of the balancing balls are installed not only with eccentricity, but also have a horizontal axis of rotation (with the framework of the Jeffcott model). This formulation of the problem also allows taking into account small angular errors when installing an auto-balancing device. Using the software package, a graph of the dependence between the amplitude of the movement of the center of mass of the rotor and the angular velocity of the rotor in stationary motion was obtained.

Keywords: auto-balancing system; eccentricity; angular error.

УДК 531.01:629.78

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПЛАНЕТЫ

Коршунова Н.А., Рузматов М.И.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: bea40371@rambler.ru, mexanik1123@rambler.ru

Аннотация: Рассматривается проблема определения аналитических решений задачи оптимизации траекторий точки (центр масс космического аппарата) на участках промежуточной тяги в гравитационном поле осесимметричной сфероидальной планеты. Найдены условия использования потенциала поля двух неподвижных центров при построении гравитационного потенциала планеты. Частные решения, полученные для задачи о минимизации характеристической скорости в случае гравитационного поля двух неподвижных центров, применены для определения решения в случае движения точки в гравитационном поле осесимметричной сфероидальной планеты. Найденные активные участки принадлежат круговым траекториям, плоскости которых перпендикулярны линии центров. Вектор тяги лежит в плоскости, нормальной к траектории. Величины, описывающие полученные участки, зависят от начального положения точки, от расстояния до оси симметрии и от положения плоскости траектории. Для конкретных значений положения плоскости траекторий проведен графический анализ зависимостей величин, характеризующих направление и величину силы тяги, от расстояния до оси симметрии. Определены точки, где происходит реверс тяги по радиальной и трансверсальной составляющим базис-вектора.

Ключевые слова: оптимизация траекторий; участки промежуточной тяги; зональные гармоники; поле двух неподвижных центров; сфероидальная планета; частные решения; реверс силы тяги.

Введение. Существует проблема определения аналитических решений задачи об оптимальном движении точки переменной массы (центр масс космического аппарата - КА) в гравитационном поле. Вариационная задача в постановке Лоудена [1] заключается в определении величины и направления реактивной силы, переводящей точку из заданного положения в некоторое конечное, минимизируя заданный функционал, соответствующий задаче Майера. Секундный расход массы m ограничен, относительная скорость истечения продуктов сгорания считается постоянной. Несмотря на актуальность и многочисленные исследования, проблема определения аналитических решений на активных участках в центральных и тем более в нецентральных гравитационных полях до сих пор остается нерешенной. Поэтому приходится аппроксимировать эти участки точками соединения или отказываться от критерия оптимальности, или же использовать численное интегрирование. Импульсная теория хорошо разработана, но на практике такая аппроксимация часто не отражает истинного маневра. Метод Лоудена, основанный на введении базис-вектора и функции переключения, позволил свести указанную проблему к проблеме интегрирования некоторых замкнутых гамильтоновых систем четырнадцатого порядка по участкам нулевой ($m = 0$), промежуточной ($0 < m < \tilde{m}$) и максимальной ($m = \tilde{m}$) тяг [2]. Такое обстоятельство

дает возможность использовать аппарат аналитической механики, развитый для гамильтоновых систем.

Известно, что дифференциальные уравнения вариационной задачи представляют собой систему четырнадцатого порядка [1,2]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \frac{cm}{M} \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda} + \mathbf{g}(\mathbf{r}); \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}; \dot{M} = -m; \\ \dot{\lambda} &= -\lambda_r; \dot{\lambda}_r = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}} \boldsymbol{\lambda}; \dot{\lambda}_M = \frac{cm}{M^2} \lambda, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки (центр масс КА), \mathbf{v} – её скорость; $M(t)$ – масса точки; c – относительная скорость истечения продуктов сгорания; m – секундный расход массы ($0 \leq m \leq \tilde{m}$); \mathbf{g} – гравитационное ускорение; λ , λ_r , λ_M – множители Лагранжа, сопряженные скорости радиусу-вектору и массе соответственно. Множитель сопряженный скорости называется базис-вектор. На оптимальной траектории реактивную силу следует направлять по базис-вектору.

В зависимости от того, какая модель гравитационного поля принимается, то есть от вида функции $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, возникают те или иные трудности интегрирования дифференциальных уравнений вариационной задачи (1). Аналитические решения представляют особый интерес в связи с их наглядностью и возможностью всестороннего анализа. Они являются опорными при качественной оценке точности алгоритма управления [3]. Проблеме определения аналитических решений задачи оптимизации траекторий космических аппаратов в различных гравитационных полях посвящены многочисленные исследования [4]. Существенные результаты по определению аналитических решений для активных участков были получены в работах Азизова А.Г., Коршуновой Н.А., Азимова Д.М., Рuzматова М.И., Зиядиновой Э.Д. Ими найдены частные интегралы и практически важные решения для активных участков в центральном ньютоновском поле [5,6], в центральном линейном поле [7], в случае гравитационного поля двух неподвижных центров и его предельного варианта [8,9], в случае ограниченной задачи трёх тел [10, 11], в случае осесимметричных гравитационных полей Баррара [12] и Гарфинкеля [13].

Одной из наиболее простых, но достаточно полно отражающей природу движения небесных тел является задача двух тел [14]. При постановке этой модельной задачи предполагается, что существуют только два взаимно притягивающихся тела с массами \tilde{M} и M , причем $\tilde{M} \geq M$. Тело массой \tilde{M} является шаром со сферическим распределением плотности, поэтому его массу можно сосредоточить в его центре. Малое тело массой M рассматривается как материальная точка. Ограниченная задача двух тел сводится к исследованию движения материальной точки в центральном ньютоновском поле [15]. Центр притяжения считается неподвижным в инерциальной системе отсчета, а сила притяжения со стороны точки массой M не учитывается.

Но планеты имеют фигуры, заметно отличающиеся от шаров со сферическим распределением плотности. Например, сжатие Юпитера составляет 1/10; Сатурна – 1/16; Земли – 1/298. Сжатие – это отношение разности экваториального и полярного радиусов планеты к её экваториальному радиусу.

Гравитационный потенциал планеты (Земли) без учета долготных членов в планетоцентрической (геоцентрической) экваториальной системе координат хуз можно записать в следующем виде [14, 16]

$$U = \frac{f\tilde{M}}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right\}, \quad (2)$$

где \tilde{M} – масса планеты; r – планетоцентрический радиус-вектор материальной точки; R – средний экваториальный радиус планеты; J_n – безразмерные параметры (зональные гармоники), имеющие конкретные значения для данной планеты и характеризующие сжатие планеты; P_n – полиномы Лежандра [14]; f – гравитационная постоянная.

Известно, что существует возможность применения обобщенной задачи двух неподвижных центров при исследовании движения КА в гравитационном поле сфероидальной планеты [14, 16].

Данная работа посвящена определению аналитических решений для участков промежуточной тяги (ПТ) задачи о минимизации характеристической скорости в случае осесимметричного гравитационного поля сфероидальной планеты, используя найденные ранее частные аналитические решения вариационной задачи в случае гравитационного поля двух неподвижных центров [8, 9, 17].

Постановка задачи.

Поместим начало неподвижной декартовой системы координат xuz в центр масс O осесимметричной планеты. Ось Oz направим по оси симметрии. Рассмотрим движение материальной точки $P(xuz)$ в поле двух неподвижных центров C_1 и C_2 , имеющих соответственно массы m_1 и m_2 , и расположенных на оси Oz (рис. 1).

Аппликаты этих центров: $z_1=c_1, z_2=c_2$.

Тогда силовая функция поля двух неподвижных центров

$$U^* = f \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right), \quad (3)$$

где

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + (z - c_1)^2, \quad r_2^2 = x^2 + y^2 + (z - c_2)^2.$$

r_1, r_2 – расстояния от точки P до первого и второго центров соответственно.

Выясним, в каком случае потенциал поля двух неподвижных центров (3) по возможности мало отличается от потенциала (2) планеты. Следуя работам [14,16], разложим расстояния, обратные r_1, r_2 , в ряды по полиномам Лежандра

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_i}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right) \quad (i = 1,2),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Получим

$$U^* = \frac{f(m_1 + m_2)}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma_n}{r^n} P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right\}. \quad (4)$$

Здесь

$$\tilde{M} = m_1 + m_2,$$

$$\tilde{M}\gamma_n = m_1 c_1^n + m_2 c_2^n \quad (n \geq 2).$$

В [16] показано, что, сравнивая разложения (2) и (4), соответствующим выбором величин m_1, m_2, c_1, c_2 можно добиться совпадения коэффициентов при второй и третьей зональных гармониках обоих рядов. Для этого должны выполняться следующие условия:

$$\gamma_n = J_n R^n \quad (n=2,3) \quad (5)$$

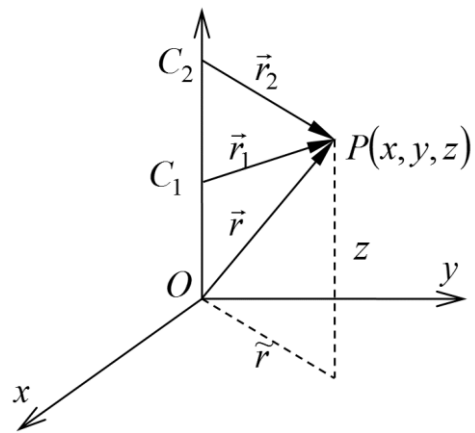


Рис.1. Система координат

$$m_1 = \frac{\tilde{M}c_2}{c_2 - c_1}, \quad m_2 = \frac{-\tilde{M}c_1}{c_2 - c_1}, \quad (6)$$

где аппликаты c_1 и c_2 являются корнями уравнения

$$\chi^2 - R \frac{J_3}{J_2} \chi - J_2 R^2 = 0. \quad (7)$$

Решая (7), найдём c_1 и c_2 , а затем из (6) найдём массы центров притяжения. Для $n \geq 4$ соотношения (5) для найденных m_1, m_2, c_1, c_2 выполняться не будут [16].

Если $r > R$, то величины $(R/r)^n$ быстро убывают при возрастании n , а поэтому разложения (2) и (4) практически совпадут с достаточной степенью точности. Следовательно, для приближенного изучения движения точки P в гравитационном поле планеты с силовой функцией (2) можно в ряде случаев пользоваться формулами, получаемыми при решении задачи двух неподвижных центров.

Определение решений.

Решение уравнения (7) имеет вид

$$c_{1,2} = \frac{R}{2} \left(\frac{J_3}{J_2} \pm \sqrt{\frac{J_3^2}{J_2^2} + 4J_2} \right).$$

Для Земли и для других планет

$$J_2 < 0, \quad \frac{J_3^2}{J_2^2} + 4J_2 < 0$$

Поэтому характеристики для поля двух неподвижных центров m_1, m_2, c_1, c_2 будут комплексными сопряженными величинами. Но силовая функция U^* и величины γ_n ($n=2;3$) будут действительными. Если пренебречь величиной J_3 (характеризует асимметрию планеты относительно экватора), то аппликаты c_1 и c_2 будут чисто мнимыми

$$c_{1,2} = \pm R \sqrt{J_2}, \quad (8)$$

а массы центров притяжения – действительными

$$m_1 = m_2 = \frac{\tilde{M}}{2}. \quad (9)$$

В работах [8, 9, 17] были найдены частные аналитические решения вариационной задачи о движении точки (центр масс КА) в гравитационном поле двух неподвижных центров, то есть вектор гравитационного ускорения g в системе (1) имеет следующие значения в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$g_{\tilde{r}} = - \left(\frac{\mu_1 \tilde{r}}{r_1^3} + \frac{\mu_2 \tilde{r}}{((d-z)^2 + \tilde{r}^2)^{3/2}} \right), \quad g_\varphi = 0,$$

$$g_z = - \left(\frac{\mu_1 z}{r_1^3} + \frac{\mu_2 (z-d)}{((d-z)^2 + \tilde{r}^2)^{3/2}} \right).$$

Полученные участки промежуточной тяги задачи о минимизации характеристической скорости принадлежат круговым траекториям, плоскости которых перпендикулярны линии центров. Начало декартовой системы координат xyz находится в центре притяжения с массой

m_1 , то есть радиусом-вектором точки P в данном случае является вектор \vec{r}_1 (рис.2).

Формулы, найденные в работах [9,17], определяющие направление и величину силы тяги в зависимости от положения активного участка в области между центрами, запишем

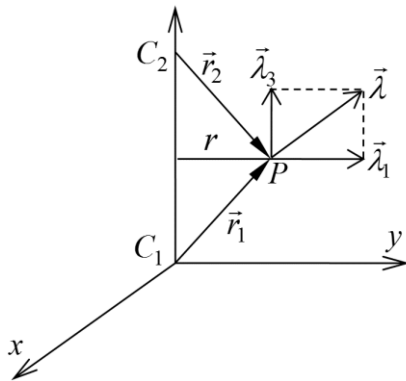


Рис.2. Направление реактивной силы

в следующем виде:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3A\sqrt{b}}{nlB - 3(\mu k^2 + n^{5/2}k_1^2)}, \quad (10)$$

$$N = \frac{\mu_2(\mu k - n^{3/2}k_1) \left[3(\mu k^2 + n^{5/2}k_1^2) - nlB \right]}{3d^2 A\sqrt{b}(nl)^{3/2}}. \quad (11)$$

Закон изменения массы $M(t)$ точки P определяется соотношением [17]:

$$M(t) = M_0 \exp\left(\frac{N}{c\lambda_1} t\right). \quad (12)$$

Здесь α – угол, который вектор тяги составляет с радиусом окружности (рис.2); r – радиус окружности; μ_1, μ_2 – гравитационные параметры центров притяжения; d – расстояние между центрами притяжения; c – относительная скорость истечения продуктов сгорания; $\lambda_1 = \cos \alpha$ – радиальная составляющая базис-вектора; M_0 – начальная масса точки.

Введены следующие обозначения:

$$n = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad b = \left(\frac{r}{d}\right)^2, \quad k = \frac{z}{d}, \quad k_1 = 1 - k, \quad (13)$$

$$A = \mu k - (1 - k)n^{5/2}, \quad B = \mu + n^{3/2}, \quad l = b + (1 - k)^2$$

$$r_1^2 = r^2 + k^2 d^2, \quad r_2^2 = r^2 + (1 - k)^2 d^2 \quad (14)$$

Величина $b=b(r)$, характеризующая расстояние до оси симметрии планеты, определяется видом планеты. На рис.3 сравниваются величины $b=b(r)$ для различных планет в зависимости от этого расстояния. По оси абсцисс даётся расстояние в условных единицах.

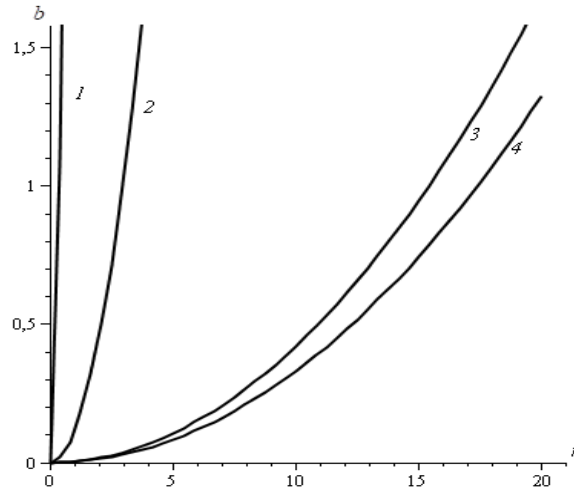


Рис.3. Зависимости $b(r)$ для различных планет: 1 – Земля; 2 – Уран; 3 – Сатурн; 4 – Юпитер

Воспользуемся приведёнными выше результатами из работ [9, 17] для получения решения в случае движения точки в гравитационном поле осесимметричной сфероидальной планеты с силовой функцией (2).

Рассмотрим случай $J_2 \neq 0$, $J_3 = 0$. Согласно (9)

$$m_1 = m_2 = \frac{\tilde{M}}{2}, \quad \mu_1 = \mu_2, \quad \mu = 1$$

В соответствии с (8) имеем

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 2R\sqrt{J_2},$$

то есть расстояние между центрами

$$d = 2R\sqrt{|J_2|}$$

Положение плоскости траектории определяется величиной $0 < k \leq 1$.

1. Возьмём для определенности $k=1/3$, то есть плоскость траектории находится от начала координат на расстоянии $z=1/3d$. Из (14) имеем

$$r_1^2 = r^2 + \frac{1}{9}d^2, \quad r_2^2 = r^2 + \frac{4}{9}d^2$$

Тогда соотношения (13) принимают следующие значения:

$$n = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{9r^2 + d^2}{9r^2 + 4d^2} = \frac{9b+1}{9b+4}, \quad \mu = 1, \quad b = \frac{r^2}{d^2}, \quad k_1 = \frac{2}{3}, \quad A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}n^{5/2}, \quad B = 1 + n^{3/2}, \quad (15)$$

$$l = b + \frac{4}{9}, \quad nl = \frac{9b+1}{9}$$

Значение величины $d = 2R\sqrt{|J_2|}$ зависит от вида планеты. Для каждой конкретной планеты эта величина является постоянной. Подставляя (15) в (10) и в (11), найдём направление и величину силы тяги как функции r – расстояния до оси симметрии Oz (или радиус окружности).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9(1-2n^{5/2})\sqrt{b}}{(9b+1)(1+n^{3/2})-3(1+4n^{5/2})}, \quad \tilde{N} = \frac{(1-2n^{3/2})\left[3(1+4n^{5/2})-(9b+1)(1+n^{3/2})\right]}{(1-2n^{5/2})\sqrt{b}(9b+1)^{3/2}}.$$

Здесь $n = n(b)$, $b = b(r)$, b пропорционально r^2 , $\tilde{N} = Nd^2 / \mu_2$ – безразмерная величина. Величины n, b также безразмерные. На рис. 4, 5 даны зависимости $\operatorname{tg} \alpha$ и \tilde{N} , характеризующие направление силы тяги и закон изменения массы от расстояния до оси симметрии z . По оси абсцисс откладывается величина $b=r^2/d^2$. По оси ординат на рис. 4 – величина $\operatorname{tg} \alpha$, а на рис.5 – величина \tilde{N} . Из этих графиков можно определить знаки радиальной λ_1 и трансверсальной λ_3 составляющих базис-вектора, а также точки, где происходит реверс тяги. Поскольку масса точки на активных участках убывает, то из (12) следует, что $N/\lambda_1 < 0$. В точках, где величина \tilde{N} меняет знак, происходит реверс тяги по радиальной составляющей базис-вектора λ_1 . В точках, где $\operatorname{tg} \alpha$ меняет знак, но \tilde{N} знака не меняет или \tilde{N} меняет знак, но $\operatorname{tg} \alpha$ знака не меняет, происходит реверс тяги по трансверсальной составляющей базис-вектора λ_3 .

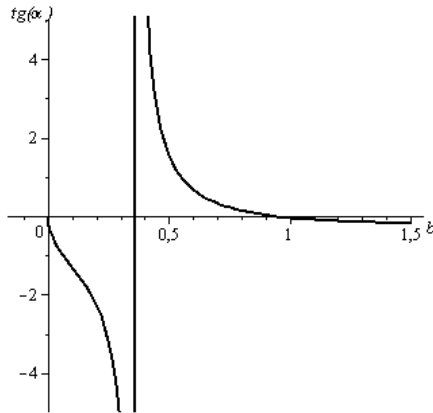


Рис.4. Зависимость $\operatorname{tg} \alpha$ от расстояния до оси симметрии ($k=1/3$).

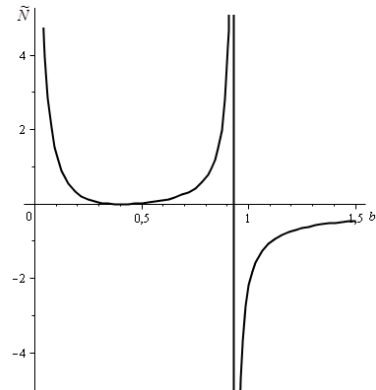


Рис.5. Зависимость расхода массы от расстояния до оси симметрии ($k=1/3$).

Из рисунков 4, 5 видно, что для значений $0 < b < 0.361$ имеем $\lambda_1 < 0$ ($\tilde{N} > 0$), $\text{tg}\alpha < 0$, $\lambda_3 > 0$; для значений $0.361 < b < 0.932$ имеем $\lambda_1 < 0$ ($\tilde{N} > 0$), $\text{tg}\alpha > 0$, $\lambda_3 > 0$; для значений $b > 0.932$ имеем $\lambda_1 > 0$ ($\tilde{N} < 0$), $\text{tg}\alpha < 0$, $\lambda_3 < 0$. Таким образом, в точке $b=0.361$ происходит реверс тяги по трансверсальной составляющей базис-вектора λ_3 , а в точке $b=0.932$ – реверс тяги по радиальной составляющей базис-вектора λ_1 .

Аналогично, для случая $k=4/5$ получим

$$\text{tg}\alpha = \frac{15(4 - n^{5/2})\sqrt{b}}{(25b + 16)(1 + n^{3/2}) - 3(16 + n^{5/2})}, \quad \tilde{N} = \frac{5(4 - n^{3/2}) \left[3(16 + n^{5/2}) - (25b + 16)(1 + n^{3/2}) \right]}{3(4 - n^{5/2})\sqrt{b}(25b + 16)^{3/2}}.$$

Графики на рис. 6, 7 показывают, что для значений $0 < b < 0.298$ имеем $\lambda_1 < 0$ ($\tilde{N} > 0$), $\text{tg}\alpha > 0$, $\lambda_3 < 0$; для значений $0.098 < b < 0.355$ имеем $\lambda_1 > 0$ ($\tilde{N} < 0$), $\text{tg}\alpha < 0$, $\lambda_3 < 0$; для значений $0.355 < b < 0.770$ имеем $\lambda_1 < 0$ ($\tilde{N} > 0$), $\text{tg}\alpha < 0$, $\lambda_3 > 0$; для значений $b > 0.770$ имеем $\lambda_1 > 0$ ($\tilde{N} < 0$), $\text{tg}\alpha > 0$, $\lambda_3 > 0$. Таким образом, в точке $b=0.098$ происходит реверс тяги по радиальной составляющей базис-вектора λ_1 , в точке $b=0.355$ – реверс тяги по обеим составляющим базис-вектора λ_1 и λ_3 , а в точке $b=0.770$ – реверс тяги по радиальной составляющей базис-вектора λ_1 .

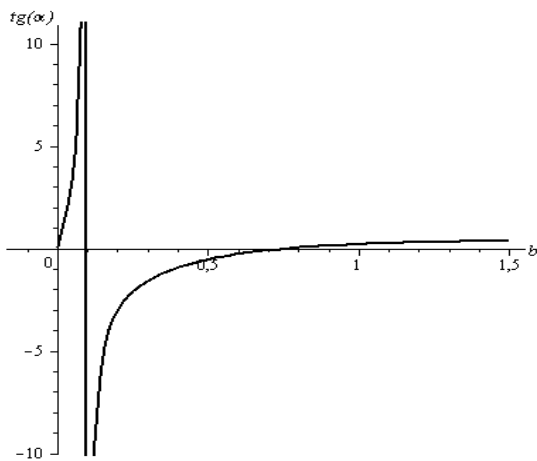


Рис.6. Зависимость $\text{tg}\alpha$ от расстояния до оси симметрии ($k=4/5$).

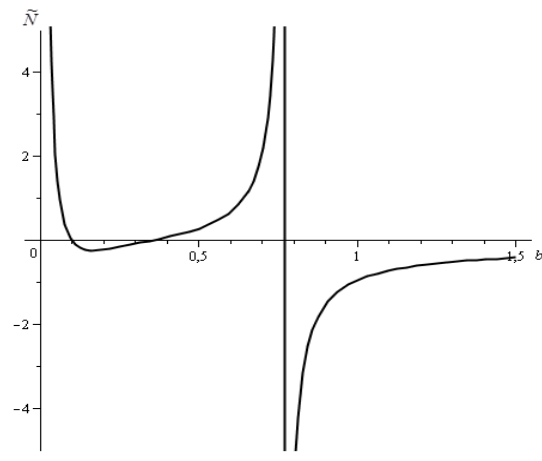


Рис.7. Зависимость расхода массы от расстояния до оси симметрии ($k=4/5$).

Таким образом, закон изменения реактивной силы по величине и по направлению зависит от начального положения точки и от расстояния до оси симметрии. Области устойчивости найденных программных движений можно определить аналогично работам [12, 20].

Заключение. Для вариационной задачи о движении точки (центр масс КА) с промежуточной тягой в гравитационном поле осесимметричной сфероидальной планеты найден класс частных аналитических решений. Полученные активные участки принадлежат круговым траекториям, плоскости которых перпендикулярны оси симметрии. Вектор тяги лежит в плоскости, нормальной к траектории. Найденны зависимости направления и величины реактивной силы от положения плоскости траектории. Показано, что масса изменяется по показательному закону. Величины, описывающие полученные активные участки, зависят от начального положения точки, от расстояния до оси симметрии и от положения плоскости траектории. Для конкретных значений положения плоскости траекторий проведен графический анализ зависимостей величин, характеризующих направление и величину силы тяги, от расстояния до оси симметрии. Найденны точки, где происходит реверс тяги по ра-

диальной и трансверсальной составляющим базис-вектора. При построении гравитационного потенциала планеты использован потенциал поля двух неподвижных центров и результаты, полученные ранее для задачи о минимизации характеристической скорости в случае гравитационного поля двух неподвижных центров.

Полученные траектории могут быть использованы в качестве опорных при численном интегрировании, а также найти применение при осуществлении конкретных маневров в небесной баллистике.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. Москва. Мир, 1966, –152 с.
- [2] Azizov A.G., Korshunova N.A. On an analytical solution of optimum trajectory problem in a gravitational field // Celestial Mechanics. 1986, Vol.38, No.4, pp. 297-306.
- [3] Azimov Dilmurat M. Analytical Solutions for Extremal Space Trajectories. Honolulu. Hawaii, 2016, –381 p.
- [4] Азимов Д.М. Обзор работ по исследованию активных участков в гравитационных полях // Автоматика и Телемеханика. РАН. 2005, Том.66, Вып.11, С. 1715-1732.
- [5] Азизов А.Г., Коришунова Н.А. Вариационные задачи механики космического полета. Ташкент. ТашГУ, 1992, –84с.
- [6] Азизов А.Г., Коришунова Н.А. Применение метода Леви-Чивита при анализе оптимальных траекторий // Космические исследования. 1979, Том.17, Вып.3, С. 378-386.
- [7] Азизов А.Г., Коришунова Н.А. Об оптимальных траекториях в гравитационных полях, допускающих аппроксимацию центральным линейным // Космические исследования. 1991, Том.29, Вып.4, С. 525-531.
- [8] Korshunova Natalya A. and Azimov Dilmurat M. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics (AIAA), USA. 2014, Vol.37, No.5, pp. 1716-1719.
- [9] Коришунова Н.А., Зиядинова Э.Д. Методы определения аналитических решений для активных участков в поле двух неподвижных центров / Труды X Международной Четаевской конференции, Аналитическая механика, устойчивость и управление: Казань, 2012, Том 1. С.192-200.
- [10] Коришунова Н.А., Рузматов М.И. Аналитические решения для участков промежуточной тяги в случае некруговой ограниченной задачи трёх тел // Проблемы механики. 2016, №2. С.3-7.
- [11] Maksud I. Ruzmatov, Dilmurat.M.Azimov, Natalya.A.Korshunova. A new class of Intermediate Thrust Arcs in the Restricted Three-body Problem // «Advances in Space Research» USA. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.08.063>.
- [12] Коришунова Н.А., Рузматов М.И. Аналитические решения задачи оптимизации траекторий в случае гравитационного поля Баррара // Проблемы механики. 2022, № 2. С. 3-11.
- [13] Коришунова Н.А., Тожиев Р.И. Аналитические решения для активных участков в случае гравитационного поля Гарфинкеля / Сборник научных статей Международной научно-практической конференции «Инновация -2022»: Ташкент, 2022. С.274 – 275.
- [14] Дёмин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. Москва. Наука, 1968, – 352 с.
- [15] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. Москва. Наука, 1990, – 448 с.
- [16] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Москва. Наука, 1968, – 800 с.
- [17] Коришунова Н.А., Зиядинова Э.Д. Аналитические решения вариационной задачи для активных участков в поле двух неподвижных центров// Проблемы механики». 2009, № 1, С. 3-6.
- [18] Korshunova Natalya.A. and Azimov Dilmurat.M. Asymptotic Stabilization of Motion on Circular Intermediate Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // International Journal of Space Science and Engineering, USA. 2017, Vol.4, No.3, pp. 167-173.
- [19] Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва. МГУ, 2020, –165с.
- [20] Коришунова Н.А., Зиядинова Э.Д. Стабилизация движения точки на участках промежуточной тяги в поле двух неподвижных центров // Проблемы механики. 2011, № 1, С.3-5.

Дата поступления
10.05.2023

Коришунова Н.А., Рузматов М.И. Сфероидал сайёра гравитацион майдонида траекторияларни оптималлаштириши масаласининг аналитик ечимларини аниқлашни янги усули

Аннотация: Ўққа симметрик сфероидал сайёра гравитацион майдони ҳолида оралиқ тортмиш қисмлари учун нуқта (космик аппарат массалар маркази) траекторияларини оптималлаш масаласининг аналитик ечимларини аниқлаш муаммоси кўрилган. Сайёранинг гравитацион потенциални тузишда иккита қўзғалмас марказ майдони потенциалдан фойдаланиш шартлари топилган. Иккита қўзғалмас марказ гравитацион майдони ҳолида характеристик тезликни минималлаш масаласи учун олинган хусусий ечимлар, ўққа симметрик сфероидал сайёра гравитацион майдонида ҳаракатланувчи нуқта ҳолида ечимларни аниқлаш учун қўлланилган. Топилган актив қисмлар тортмиш марказларини бириктирувчи чизикқа перпендикуляр бўлган текисликда ётувчи айлана ёйлари бўлиши кўрсатилган. Тортмиш кучи вектори траекторияга нормал текисликда ётади. Олинган актив қисмларни тавсифловчи миқдорлар нуқтанинг бошланғич ҳолати, симметрия ўқиғача масофа ва траектория текислиги ҳолатига боғлиқ. Траекториялар текислиги ҳолатининг аниқ қийматлари учун тортмиш кучини миқдори ва йўналишини симметрия ўқиғача бўлган масофага боғлиқлиги графиклари таҳлил қилинган. Базис-векторнинг радиал ва трансверсал ташиқил этувчилари бўйича тортмиш кучини реверси содир бўладиган нуқталар топилган.

Калит сўзлар: траекторияларни оптималлаштириши; оралиқ тортмиш қисмлари; зонал гармоникалар; иккита қўзғалмас марказ майдони; сфероидал сайёра; хусусий ечимлар; тортмиш кучи реверси.

Korshunova N.A., Ruzmatov M.I. A New Method for Determining Analytical Solutions to the Trajectory Optimization Problem in the Gravitational Field of a Spheroidal Planet

Abstract. The problem of determining the analytical solutions of the problem of optimizing the trajectories of a point (the center of mass of a spacecraft) in the intermediate thrust arcs in the gravitational field of an axisymmetric spheroidal planet is considered. The conditions for using the potential of the field of two fixed centers in the construction of the gravitational potential of the planet are found. Particular solutions obtained for the problem of minimizing the characteristic velocity in the case of a gravitational field of two fixed centers are applied to determine the solution in the case of a point moving in the gravitational field of an axisymmetric spheroidal planet. The found active areas belong to circular trajectories, the planes of which are perpendicular to the line of centers. The thrust vector lies in the plane normal to the trajectory. The values describing the obtained sections depend on the initial position of the point, on the distance to the axis of symmetry, and on the position of the trajectory plane. For specific values of the position of the trajectory plane, a graphical analysis of the dependences of the quantities characterizing the direction and magnitude of the thrust force on the distance to the axis of symmetry was carried out. The points where the thrust is reversed along the radial and transversal components of the basis vector are determined.

Keywords: trajectory optimization; intermediate thrust arcs; zonal harmonics; field of two fixed centers; spheroidal planet; particular solutions; traction force reverse.

УДК 517.958:531.12; 534.11

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАНАТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Литвинов В.Л., Литвинова К.В.

Самарский государственный технический университет
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. В статье исследуются колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами. При постоянной скорости продольного движения колебания каната характеризуются набором собственных частот. В случае отсутствия сопротивления среды для решения задачи использовано дискретное преобразование Фурье. В результате в виде ряда получено уравнение, позволяющее найти точные значения собственных частот. Задача при наличии сопротивления среды решалась методом Канторовича-Галеркина. Полученное уравнение позволяет найти приближённые значения двух первых собственных частот. Сравнением точных и приближённых частот оценена точность решения, полученного методом Канторовича-Галеркина. В статье проанализировано, как влияет скорость продольного движения каната на форму собственных колебаний. Решение произведено в безразмерных переменных, что позволяет использовать полученные результаты для расчёта колебаний широкого круга технических объектов.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами; краевые задачи; математические модели; резонансные свойства; дискретное преобразование Фурье.

Введение. В статье исследуются поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками [1-22]. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [2, 9, 13, 20], гибкие звенья передач [1, 8, 17], балки [3, 18], лентопротяжные механизмы [14], конвейеры [16] и т.д. Наличие движущихся границ делает неприменимыми к решению таких краевых задач классические методы математической физики, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

Постановка задачи. Схема объекта изучения изображена на рисунке 1.

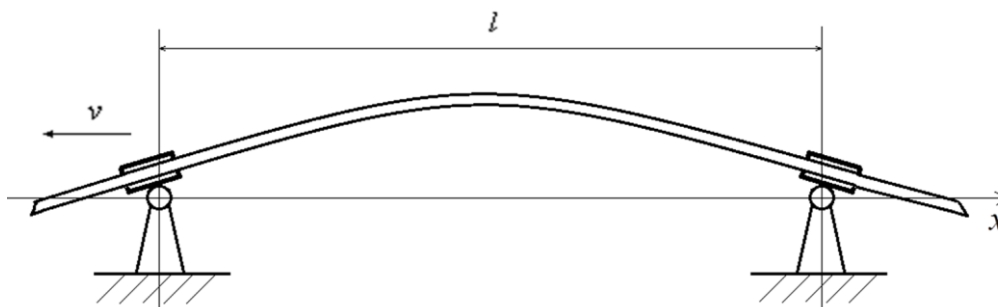


Рис.1. Схема объекта

Уравнение, учитывающее изгибную жёсткость, натяжение каната и сопротивление внешней среды, имеет вид:

$$u_{tt}(x, t) + bu_{xxxx}(x, t) - a^2u_{xx}(x, t) + Gu_t(x, t) = 0. \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ -поперечное смещение точки каната с координатой x в момент времени t ; $b=EI/\rho$ (E - модуль упругости материала каната; I -осевой момент инерции сечения каната, ρ -масса единицы длины каната); $a^2=T/\rho$ (T -натяжение каната); G - коэффициент сопротивления среды (сила, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения).

Граничные условия имеют вид:

$$u(vt, t) = 0; u(vt + l, t) = 0; u_{xx}(vt, t) = 0; u_{xx}(vt + l, t) = 0, \quad (2)$$

где v - скорость продольного движения каната, l -длина колеблющейся части.

Введем безразмерные переменные:

$$u(x, t) = U(\xi, \tau); \quad \xi = \frac{2\pi(x - vt)}{l}; \quad \tau = \frac{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}{l} t.$$

В результате получим задачу с условиями, заданными на неподвижных границах:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta U_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \gamma U_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \lambda U_{\tau}(\xi, \tau) - \eta U_{\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (3)$$

$$U(0, \tau) = 0; U(2\pi, \tau) = 0; U_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; U_{\xi\xi}(2\pi, \tau) = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$\beta = \frac{4\pi^2 b}{l^2(a^2 - v^2)}; \quad \lambda = \frac{Gl}{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}; \quad \gamma = \frac{2v}{\sqrt{a^2 - v^2}}; \quad \eta = \frac{Gvl}{2\pi(a^2 - v^2)}.$$

Четыре коэффициента уравнения (1) могут быть выражены через три безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{v}{a}; \quad \theta = \frac{4\pi^2 b}{l^2 a^2}; \quad D = \frac{Gl}{2\pi a}.$$

Параметры характеризуют: α - скорость продольного движения каната; θ - изгибную жёсткость; D - сопротивление среды.

Через безразмерные параметры коэффициенты уравнения (3) выражаются следующим образом:

$$\beta = \frac{\theta}{1 - \alpha^2}; \quad \gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad \lambda = \frac{D}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad \eta = \frac{\alpha D}{1 - \alpha^2}.$$

Решение задачи. Решим задачу (3), (4) без учёта изгибной жёсткости ($\beta = 0$). Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}.$$

Для нахождения функции $\mu(\xi)$ получим следующую краевую задачу:

$$\mu''(\xi) + (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) - (\omega^2 + \lambda\omega)\mu(\xi) = 0; \quad (5)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0. \quad (6)$$

Решение задачи (5-6) не представляет затруднений. В результате решения получено выражение для собственных частот колебаний:

$$\omega_n = -\frac{\gamma\eta + 2\lambda}{\gamma^2 + 4} + i \frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4)(n^2 + \eta^2) - (\gamma\eta + 2\lambda)^2}}{\gamma^2 + 4}, \quad (7)$$

Здесь i - мнимая единица; n - порядковый номер частоты. Действительная часть выражения (7) характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту.

При отсутствии затухания ($\lambda=\eta=0$) выражение (7) примет вид:

$$\omega_n = i \frac{n}{\sqrt{\gamma^2 + 4}}. \quad (8)$$

При этом собственные функции определяются выражением:

$$\mu(\xi) = \sin\left(\frac{(1 - \alpha)n\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{(1 + \alpha)n\xi}{2}\right).$$

Как изменяются собственные функции $\mu(\xi)$ в зависимости от параметра α показано на рис.2.

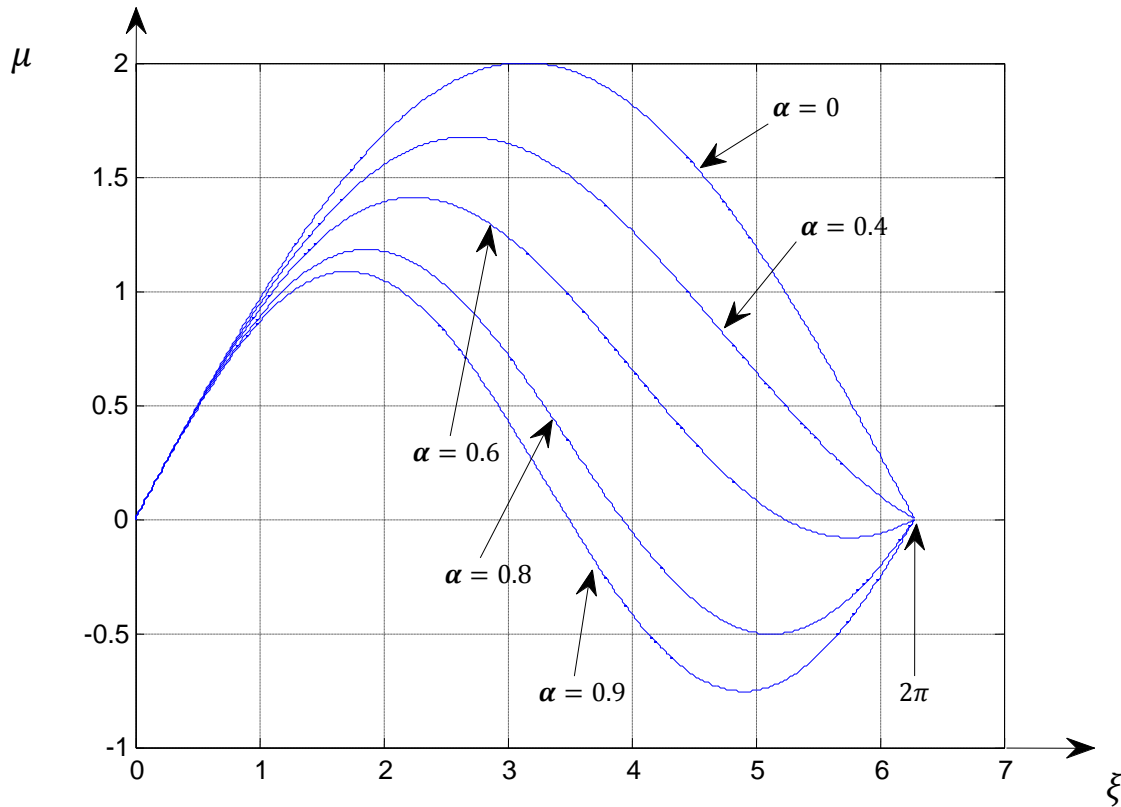


Рис.2. Зависимость собственных функций от скорости продольного движения каната

Анализ рисунка 2 показывает, что чем больше скорость движения каната, тем больше искажаются собственные функции. Искажение происходит на границе, движущейся навстречу бегущим волнам.

Решим задачу (3, 4) с учётом изгибной жёсткости, но без учета затухания ($\lambda=\eta=0$). Решение будем искать в виде

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{i\omega\tau},$$

где i - мнимая единица.

Для определения $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$\beta\mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - i\gamma\omega\mu'(\xi) - \omega^2\mu(\xi) = 0; \quad (9)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu'(0) = 0; \mu'(2\pi) = 0. \quad (10)$$

Для решения предполагается использовать дискретное преобразование Фурье. При применении преобразования к задаче (9,10) ряд для $\mu''(\xi)$ получается расходящимся. Для улучшения сходимости введем новую функцию:

$$f(\xi) = \mu(\xi) + \frac{\mu_1}{2}\xi - \frac{\mu_1}{2}\xi^3 + \frac{\mu_1}{2}\xi^4, \quad (11)$$

где $\mu_1 = \mu'(2\pi) - \mu'(0)$.

Функция $f(\xi)$ удовлетворяет условиям:

$$f(0) = 0; f(2\pi) = 0; f''(0) = 0; f''(2\pi) = 0; f'(2\pi) = f'(0).$$

Это улучшает сходимость получаемых далее рядов.

Относительно $f(\xi)$ получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \beta f''''(\xi) - f''(\xi) - i\gamma\omega f'(\xi) - \omega^2 f(\xi) = \\ & = \mu_1 \left(\frac{12\beta}{(2\pi)^3} - \frac{1}{2} i\gamma\omega + \left(\frac{6}{(2\pi)^2} - \frac{\omega^2}{2} \right) \xi + \left(\frac{-6}{(2\pi)^3} + i\gamma\omega \frac{3}{(2\pi)^2} \right) \xi^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\omega^2}{(2\pi)^2} - \frac{2}{(2\pi)^3} i\gamma\omega \right) \xi^3 - \frac{\omega^2}{2(2\pi)^3} \xi^4);$$

$$f(0) = 0; f(2\pi) = 0; f''(0) = 0; f''(2\pi) = 0.$$

Для решения задачи используем дискретное преобразование Фурье:

$$F(p) = \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{ip\xi} d\xi; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

В результате применения преобразования получим:

$$F(p) = \frac{-\beta f_3 + 0.30396 \frac{\mu_1}{p^4} (-p^2 + (\beta\omega p + \omega^2)(3.28991p^2 + 1))}{\beta p^4 + p^2 - \beta\omega p - \omega^2}; \quad p = \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$F(0) = \frac{\beta}{\omega^2} f_3 + 0.30396 \mu_1 \left(12.98788 - \frac{\beta}{\omega^2} - \frac{3.289905}{\omega^2} \right),$$

где $f_3 = f'''(2\pi) - f'''(0)$.

Обратное интегральное преобразование имеет вид:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} F(p) e^{-ip\xi}. \quad (12)$$

Объединяя члены при p и $-p$ с учётом (11) и краевых условий (10), получим систему двух линейных уравнений относительно μ_1 и f_3 :

$$\mu(2\pi) = \mu(0) = \frac{1}{2\pi} \left(F(0) + \sum_{p=1}^{\infty} (F(-p) + F(p)) \right) = 0;$$

$$\mu''(2\pi) = \mu''(0) = -\frac{1}{2\pi} \left(F(0) + \sum_{p=1}^{\infty} p^2 (F(-p) + F(p)) \right) = 0.$$

Из равенства нулю определителя системы получается уравнение собственных частот:

$$\left(\frac{\beta}{\omega^2} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p}{A_p^2 - B_p^2} \right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-A_p p^2 + (3.28991 p^2 + 1)(A_p \omega^2 + B_p^2)}{p^2 (A_p^2 - B_p^2)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p p^2}{A_p^2 - B_p^2} * \\ * \left(12.98778 - \frac{\beta}{\omega^2} - \frac{3.28991}{\omega^2} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-A_p p^2 + (3.28991 p^2 + 1)(A_p \omega^2 + B_p^2)}{p^4 (A_p^2 - B_p^2)} \right). \quad (13)$$

Здесь $A_p = \beta p^4 + p^2 - \omega^2$; $B_p = \gamma \omega p$.

Решим задачу (3), (4) методом Канторовича-Галеркина. Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi) e^{\omega\tau}.$$

Для определения $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$L[\mu(\xi)] = \beta \mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - (\gamma\omega + \eta) \mu'(\xi) + (\omega^2 + \omega\lambda) \mu(\xi) = 0; \quad (14)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu''(0) = 0; \mu''(2\pi) = 0. \quad (15)$$

Функцию $\mu(\xi)$ возьмём в виде:

$$\mu(\xi) = C_1 \mu_1(\xi) + C_2 \mu_2(\xi),$$

где $\mu_1(\xi) = \sin \frac{\xi}{2}$; $\mu_2(\xi) = \sin \xi$. Данные функции удовлетворяют граничным условиям (15) и являются первой и второй собственными функциями задачи (3), (4) в случае, когда продольное движение каната отсутствует.

Согласно методу Канторовича-Галеркина, произвольные постоянные C_1 и C_2 находятся из следующей однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)] \mu_1(\xi) d\xi = 0; \int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)] \mu_2(\xi) d\xi = 0.$$

Дифференциальный оператор $L[\mu(\xi)]$ определяется выражением (14).

Произведя интегрирование и приравняв определитель системы к нулю, получим уравнение собственных частот:

$$\omega^4 + 2\lambda\omega^3 + \omega^2(1.0625\beta + 0.36025\gamma^2 + 1.25) + \omega(\lambda(1.0625\beta + 1.25) + 0.72051\gamma\eta) + ((0.0625\beta + 0.25)(\beta + 1) + 0.36025\eta^2) = 0. \quad (16)$$

Данное уравнение позволяет получить две первые собственные частоты поперечных колебаний каната.

Уравнение (13) было решено численно при различных значениях параметров α и θ . Результаты вычислений приведены в таблице 1. При $\theta=0$ ряды, входящие в уравнение (13) расходятся, поэтому значения частот были вычислены по формуле (8).

Уравнение (16) решалось в среде MATLAB. Для оценки точности метода Канторовича-Галеркина уравнение (16) было решено для случая отсутствия затухания ($\lambda=\eta=0$). Результаты вычислений приведены в таблице 1. При каждом значении α приведены следующие частоты: точное значение первой собственной частоты, точное значение второй собственной частоты, приближённое значение первой собственной частоты, приближённое значение второй собственной частоты. В таблице жирным шрифтом выделены приближённые частоты имеющие погрешность более 5%.

Анализ табличных данных показывает, что погрешность частот, полученных методом Канторовича-Галеркина, увеличивается с увеличением α и уменьшается с увеличением θ . Погрешность вторых собственных частот больше чем первых.

Таблица 1.

α	θ	0	2	4	6	8	10	примечания
0	0.5	0.6124	0.7071	0.7906	0.8660	0.9354	0.9354	ω_1 (точн.)
	1	1.7321	2.2361	2.6458	3,0000	3.3166	3.3166	ω_2 (точн.)
0.2	0.5	0.6124	0.7071	0.7906	0.8660	0.9354	0.9354	ω_1 (прибл.)
	1	1.7321	2.2361	2.6458	3,0000	3.3166	3.3166	ω_2 (прибл.)
0.2	0.4899	0.6140	0.7130	0.7993	0.8769	0.9487	0.9487	ω_1 (точн.)
	0.9798	1.7576	2.2747	2.2747	3.0565	3.3805	3.3805	ω_2 (точн.)
0.2	0.4815	0.6099	0.7099	0.7968	0.8749	0.9465	0.9465	ω_1 (прибл.)
	1.0383	1.7753	2.2876	2.7048	3.0657	3.3885	3.3885	ω_2 (прибл.)
0.4	0.4583	0.6179	0.7304	0.8274	0.9137	0.9913	0.9913	ω_1 (точн.)
	0.9165	1.8430	2.4056	2.8586	3.2485	3.5968	3.5968	ω_2 (точн.)
0.4	0.4323	0.6046	0.7214	0.8196	0.9066	0.9857	0.9857	ω_1 (прибл.)
	1.1565	1.9206	2.4624	2.9055	3.2896	3.6334	3.6334	ω_2 (прибл.)
0.6	0.4000	0.6334	0.7770	0.8953	1.0001	1.0932	1.0932	ω_1 (точн.)
	0.8000	2.0419	2.7063	3.2340	3.6870	3.3960	3.3960	ω_2 (точн.)
0.6	0.3598	0.6052	0.7558	0.8780	0.9842	1.0796	1.0796	ω_1 (прибл.)
	1.3896	2.2393	2.8513	3.3542	3.7912	4.1829	4.1829	ω_2 (прибл.)
0.8	0.3000	0.7013	0.9205	1.0942	1.2435	1.3764	1.3764	ω_1 (точн.)
	0.6000	2.5899	3.5133	4.2350	4.8481	5.3913	5.3913	ω_2 (точн.)
0.8	0.2584	0.6485	0.8777	1.0576	1.2109	1.3468	1.3468	ω_1 (прибл.)
	1.9352	3.0485	3.8532	4.5168	5.0948	5.6135	5.6135	ω_2 (прибл.)
0.99	0.0705	2.1796	3.2835	4.1177	4.8151	5.4242	5.4242	ω_1 (точн.)
	1.1411	10.3101	14.4443	17.6036	20.2682	22.6175	22.6175	ω_2 (точн.)
0.99	0.0588	1.9451	3.0599	3.9129	4.6256	5.2487	5.2487	ω_1 (прибл.)
	8.4981	13.2371	16.6261	19.4233	21.8623	24.0390	24.0390	ω_2 (прибл.)

Уравнение (13) позволяет получить любую собственную частоту. Например, при $\alpha = 0.4$ и $\theta = 2$ получены следующие собственные частоты:

$$\omega_1 = 0.7770; \omega_2 = 2.7063; \omega_3 = 5.8510; \omega_4 = 10.2345; \omega_5 = 15.8673; \omega_6 = 22.7436$$

Уравнение (16) позволяет учесть затухание ($D \neq 0$). Например, для параметров $\alpha = 0.8$; $\theta = 2$; $D = 0.1$ получены следующие частоты:

$$\omega_1 = -0.0626 + 0.7543 i; \omega_2 = -0.0626 + 2.8476 i.$$

Действительная часть частот характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту.

Если ω_n безразмерная частота (задача (3), (4)), то частота исходной задачи (1), (2) находится по формуле:

$$W_n = \frac{\pi(a^2 - v^2)\beta\omega_n}{lv}.$$

Заключение. В статье произведен анализ колебаний каната движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Решение произведено точным и приближённым методами, что позволяет оценить применимость метода Канторовича-Галеркина для описания колебаний систем с движущимися границами. Полученные количественные результаты могут быть использованы для расчёта широкого круга технических объектов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самарин Ю.П., Анисимов В. Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. Вузов. Машиностроение, 1986. №12. С. 17–21
- [2] Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. –270 с.
- [3] Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1970. №1. С. 159–161.
- [4] Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. –320 с
- [5] Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2009. №1(18). С. 149–158.
- [6] Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Сам.гос. техн. унта. Сер. Физ.-мат. Науки, 2012. №3(28). С. 145–151.
- [7] Ding Hu, Chen Li-Qun. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams // J. Sound and Vibr., 2010. No. 17. P. 3484–3494.
- [8] Zhu W. D., Zheng N. A. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 2008, vol. 75, No. 3.
- [9] Zhu W. D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust., 2006. No. 1. P. 66–78.
- [10] Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Возбуждение волн нагрузкой, движущейся по поврежденной гибкой одномерной направляющей, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С.14–18.
- [11] Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Генерация волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Машиностроение и инженерное образование. 2014. № 2 (39). С.37–40.
- [12] Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. № 6 (70), 2013. – С. 18–29.
- [13] P. Zhang, C. M. Zhu, L. J. Zhang. Analyses of longitudinal vibration and energetic on flexible hoisting systems with arbitrarily varying length// Journal of Shanghai Jiao-Tong University, 2008, 42(3). Pp. 481–488.
- [14] Рагульский К.И. Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов // В сб.: Динамика машин. – М.: Наука, 1971. – С. 169–177.
- [15] S.H. Chen, J. L.Huang. On internal resonance of nonlinear vibration of axially moving beams// Acta Mechanica Sinica, 2005, vol.37, no. 1. pp. 57–63 (Chinese).
- [16] Хосаев Х. С. Математическое описание динамических характеристик канатного става ленточного конвейера // Тр. Сев.-Кавк. гос. технол. ун-та. – 2001. –№8. –С. 234–239.
- [17] Тихонов В.С., Абрамов А.А. Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке//Вестник МГУ. Сер. 1, 1993. №5. С.45-48.
- [18] Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2015. Т. 19, №2. С. 382–397.
- [19] Кечеджиян Л.О., Пинчук Н. А., Столяр А.М. Об одной задаче математической физики с подвижной границей // Извест. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки, 2008. –№ 1. – С. 22–27.
- [20] Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. С. 70–77.
- [21] Литвинов В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений, Тр. ИММ УрО РАН, 26, 2020, С. 188–199.
- [22] Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегро-дифференциальным уравнениям, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 62:6 (2022), С. 977–986.

Дата поступления
20.06.2023

Литвинов В.Л., Литвинов К.В. Узунламасина йўналишида ҳаракатланадиган арқоннинг қўндаланг тебраниш частоталарини ҳисоблаш учун дискрет Фурье конвертациясини қўллаш

Аннотация: Мақолада узунламасина йўналишида ҳаракатланадиган арқоннинг тебранишлари ўрганилади. Модел арқоннинг кучланишини, егилиш қаттиқлигини ва ташқи муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олади. Тадқиқот объекти ҳаракатланувчи чегараларга ега бўлган бир ўлчовли тебранувчи объектларнинг кенг доирасига тегишли. Узунламасина ҳаракатнинг доимий тезлигида арқон тебранишлари табиий частоталар тўплами билан тавсифланади. Ўртача қаршилик бўлмаса, муаммони ҳал қилиш учун дискрет Фурье трансформацияси қўлланилади. Натижада, табиий частоталарнинг аниқ қийматларини топишга имкон берадиган кетма-кетлик шаклида тенглама олинди. Ўртача қаршилик мавжуд бўлган муаммо Канторович-Галеркин усули билан ҳал қилинди. Олинган тенглама дастлабки иккита табиий частотанинг тахминий қийматларини топишга имкон беради. Аниқ ва тахминий частоталарни солиштириб, Канторович-Галеркин усулида олинган еритманинг аниқлиги баҳоланади. Мақолада арқоннинг узунламасина ҳаракати тезлиги табиий тебранишлар шаклига қандай таъсир қилишини таҳлил қилади. Йечим ўлчамсиз ўзгарувчиларда ишлаб чиқарилади, бу еса олинган натижалардан техник объектларнинг кенг доирадаги тебранишларини ҳисоблаш учун фойдаланиш имконини беради.

Калим сўзлар: ҳаракатланувчи чегаралари бўлган жисмларнинг тебранишлари; чегаравий масалалар; математик моделлар; резонанс хусусиятлари; дискрет Фурье трансформацияси.

Litvinov V.L., Litvinova K.V. Application of the discrete fourier transform to calculate the frequencies of transversal oscillations of a rope moving in the longitudinal direction

Abstract: The article researches the oscillations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the tension of the rope, flexural stiffness and resistance of the external environment. The object of the study refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries. At a constant speed of longitudinal motion, the rope oscillations are characterized by a set of eigen frequencies. In the absence of medium resistance, a discrete Fourier transform is used to solve the problem. As a result, an equation is obtained in the form of series, which makes it possible to find the exact values of the eigen frequencies. The problem in the presence of medium resistance was solved by the Kantorovich-Galerkin method. The equation obtained allows us to find approximate values of the first two eigen frequencies. A comparison of the exact and approximate frequencies estimates the accuracy of the solution obtained by the Kantorovich-Galerkin method. The article analyzes how the speed of longitudinal rope motion affects the shape of natural oscillations. The solution is made in dimensionless variables, which allows us to use the obtained results to calculate the oscillations of a wide range of technical objects.

Keywords: oscillations of objects with moving boundaries; boundary value problems; mathematical models; resonant properties; discrete Fourier transform.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЧАСТИЧНО-СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ.

Халджигитов А.А., Тиловов О.У.

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: akhald@mail.ru; otajontilovov95@gmail.com.*

Аннотация: Данная работа посвящена формулировке и численному решению частично-связанной краевой задачи в рамках уравнений Бельтрами-Митчелла и уравнения теплопроводности с соответствующими термомеханическими граничными условиями. Из-за независимости уравнения теплопроводности от напряжений, оно может быть решено отдельно независимо от уравнений Бельтрами-Митчелла. При этом, для корректной постановки краевой задачи, уравнения равновесия рассмотрены в качестве граничных условий. Рассмотрена плоская задача термоупругости о свободной пластине под действием температурных воздействий приложенных по двум противоположным сторонам прямоугольника. Дискретный аналог задачи составлен конечно-разностным методом и решены методом итераций. Справедливость сформулированных краевых задач и полученных результатов обоснованы сравнением с результатами аналогичной термоупругой задачи в перемещениях.

Ключевые слова: напряжение; температура; уравнения Бельтрами-Митчелла; разностные уравнения; итерационный метод; перемещение.

Введение. Обычно, процесс деформирования конструкций и их элементов под действием механических нагрузок, сопровождается увеличением температуры в твердых телах. Математические модели, описывающие процесс распространения тепла были впервые рассмотрены в работе Дюгамеля– Неймана [1–3], в которой предполагалось, что полная деформация состоит из упругой деформации и теплового расширения. Вопросы теории термоупругости деформируемых твердых тел исследовались в следующих работах [4, 5]. Обычно, при решении термоупругих задач, температурные слагаемые считаются известными по решению уравнения теплопроводности и далее решается уравнение Ламе с известной правой частью зависящей от температуры [7]. Подобные задачи называются несвязанными задачами термоупругости. Численные примеры решения несвязанных термоупругих краевых задач рассмотрены в работах [8–11,13]. Особенно широкое развитие получили задачи теплопроводности и термоупругости в случае изотропных пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями и трещинами на основе различных аналитических и приближенных ме-

тодов [6]. Обычно, плоские задачи термоупругости сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции напряжений Эри [11]. Пространственные задачи термоупругости в напряжениях рассматривались в работе [14]. Новая постановка краевых задач теории упругости в напряжениях подробно рассмотрены в следующих работах [15,16].

Данная статья посвящена новой формулировке и численному решению краевых задач термоупругости непосредственно относительно напряжений. При этом краевая задача состоит из уравнений Бельтрами–Митчелла с учетом температуры, рассматриваемых в сочетании с уравнением теплопроводности. Рассмотрена детально плоская задача о свободной пластине под действием температурных воздействий приложенных по двум противоположным сторонам прямоугольника. При этом, на и на каждой стороне прямоугольника ставятся три граничных условия относительно напряжений и температуры, а также по одному дополнительному условию на основе уравнения равновесия для напряжений. Дискретный аналог задачи составлен конечно-разностным методом и решен методом итераций.

Формулировка термоупругой задачи относительно напряжений. Обычно, плоская задача теории упругости состоит из двух уравнений равновесия (без учета объемных сил) и одного уравнения совместности деформаций. Эти уравнения, с учетом соотношения Дюгамеля-Неймана и уравнения равновесия могут быть сведены к известному бигармоническому уравнению относительно функции напряжений эри [1-3]. В настоящей работе предлагается новая формулировка термоупругой задачи непосредственно относительно напряжений и температуры. Она состоит из уравнения Бельтрами - Митчелла с учетом температуры [1], т.е.

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{k,k} - 2\mu\alpha(T_{,ij} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \nabla^2 T) \quad (1)$$

и уравнения теплопроводности

$$c_e \dot{T} = \lambda_0 T_{,ii} \quad (2)$$

где σ_{ij} -тензор напряжений, $\sigma = \sigma_{ii}$, T - температура, X_i – объемные силы, α -коэффициент теплового расширения, ν и μ - коэффициенты Пуассона и Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера, λ_0 -коэффициент теплопроводности и c_e -теплоёмкость при постоянной деформации.

При отсутствии объемных сил, уравнение Бельтрами-Митчелла с учетом температуры имеет вид [1, 14]:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} = -2\mu\alpha(T_{,ij} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \nabla^2 T) \quad (3)$$

Умножая уравнение (3) на δ_{ij} после несложных преобразований может быть найдено следующее уравнение

$$\nabla^2 \sigma = -4\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 T, \quad \sigma = \sigma_{kk} \quad (4)$$

Сравнивая левые и правые части последнего соотношения можно выписать следующее выражение:

$$\sigma = -4\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T + C \quad (5)$$

с учетом соотношения (5) уравнение Бельтрами-Митчелла (3) может быть сведено к следующему виду:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} (T_{,ij} - \delta_{ij} \nabla^2 T) \quad (6)$$

Если температура не зависит от времени и являются функциями координат положения точек, то уравнение притока тепла имеет вид [1]:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (7)$$

При этом граничные условия и, дополнительные граничные условия соответственно имеют вид

$$\sigma_{ij,n_j} \Big|_{\Gamma} = S_i \quad (8)$$

$$\sigma_{ij,j} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (9)$$

$$T \Big|_{\Gamma} = f \quad (10)$$

где Γ - граница заданной области, S_i - поверхностная нагрузка, n_i – внешняя нормаль.

Конечно-разностный аналог плоской задачи термоупругости. Пусть краевая задача (6-10) рассматривается в прямоугольнике с длиной сторон $l_1 = 2a$ и $l_2 = 2b$ (рис.1) и в развернутом виде она имеет вид

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} = \frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

При этом граничные условия и, дополнительные граничные условия соответственно имеют вид:

$$(\sigma_x n_1 + \sigma_{xy} n_2) \Big|_{\Gamma} = S_1,$$

$$(\sigma_{xy} n_1 + \sigma_y n_2) \Big|_{\Gamma} = S_2$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right) \Big|_{\Gamma} = 0$$

$$T \Big|_{\Gamma} = f. \quad (10)^1$$

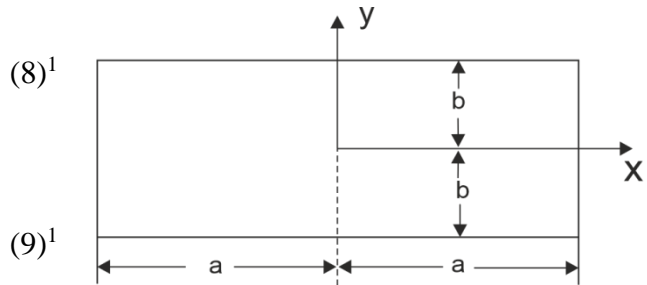


Рис. 1. Прямоугольная пластина размера (2a,2b)

Разделяя длины сторон прямоугольника на N_k можно найти шаг сетки $h_k = l_k / N_k$, $k=1,2$ по координатным осям. Тогда координаты узловых точек имеют вид $x_i = ih_1$ ($i=0, n_1$), $y_j = ih_2$ ($j=0, n_2$). Заменяя производные в уравнениях (17–18) с соответствующими конечно-разностными отношениями могут быть найдены следующие разностные уравнения

$$\frac{\sigma_{i+1,j}^x - 2\sigma_{ij}^x + \sigma_{i-1,j}^x}{h_1^2} + \frac{\sigma_{i,j+1}^x - 2\sigma_{ij}^x + \sigma_{i,j-1}^x}{h_2^2} = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{T_{i,j+1} - 2T_{ij} + T_{i,j-1}}{h_2^2} \quad (21)$$

$$\frac{\sigma_{i+1,j}^y - 2\sigma_{ij}^y + \sigma_{i-1,j}^y}{h_1^2} + \frac{\sigma_{i,j+1}^y - 2\sigma_{ij}^y + \sigma_{i,j-1}^y}{h_2^2} = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}}{h_1^2} \quad (22)$$

$$\frac{\sigma_{i+1,j}^{xy} - 2\sigma_{ij}^{xy} + \sigma_{i-1,j}^{xy}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{i,j+1}^{xy} - 2\sigma_{ij}^{xy} + \sigma_{i,j-1}^{xy}}{h_2^2} = \frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1} - T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j-1}}{4h_1 h_2} \quad (23)$$

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{ij} + T_{i,j-1}}{h_2^2} = 0 \quad (24)$$

Разрешая конечно-разностные уравнения (21), (22) (23) и (24) относительно σ_{ij}^x , σ_{ij}^y , σ_{ij}^{xy} , и T_{ij} и принимая следующие пере обозначения $\sigma_{ij}^x = \sigma_{xij}^{(k)}$, $\sigma_{ij}^y = \sigma_{yij}^{(k)}$, и $\sigma_{ij}^{xy} = \sigma_{xyij}^{(k)}$ $T_{ij}^{(k)}$ получим, соответственно

$$\sigma_{xij}^{(k+1)} = \left(\frac{\sigma_{xi+1,j}^{(k)} + \sigma_{xi-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{xij+1}^{(k)} + \sigma_{xij-1}^{(k)}}{h_2^2} - 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{T_{i,j+1} - 2T_{ij} + T_{i,j-1}}{h_2^2} \right) / \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) \quad (25)$$

$$\sigma_{yij}^{(k+1)} = \left(\frac{\sigma_{yi+1,j}^{(k)} + \sigma_{yi-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{yij+1}^{(k)} + \sigma_{yij-1}^{(k)}}{h_2^2} - 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}}{h_1^2} \right) / \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) \quad (26)$$

$$\sigma_{xyij}^{(k+1)} = \left(\frac{\sigma_{xyi+1,j}^{(k)} + \sigma_{xyi-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{xyij+1}^{(k)} + \sigma_{xyij-1}^{(k)}}{h_2^2} + \frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{T_{i+1,j+1}^{(k)} - T_{i-1,j+1}^{(k)} - T_{i+1,j-1}^{(k)} + T_{i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} \right) / \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) \quad (27)$$

$$T_{ij}^{(k+1)} = \left(\frac{T_{i+1,j}^{(k)} + T_{i-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^{(k)} + T_{i,j-1}^{(k)}}{h_2^2} \right) / (2/h_1^2 + 2/h_2^2) \quad (28)$$

где индексы изменяются во внутренних точках, т.е. $1 \leq i \leq n_1 - 1$, $1 \leq j \leq n_2 - 1$, k – номер итерации.

При этом, согласно (8–10)¹ граничные условия имеют вид (рис.1): при $x = \bar{\Gamma}a$:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)}{}_{0j} &= 0, & \sigma_{xy}^{(0)}{}_{0j} &= 0, \\ \sigma_x^{(0)}{}_{N_1j} &= 0, & \sigma_{xy}^{(0)}{}_{N_1j} &= 0 \\ T^{(0)}{}_{0j} &= f_1, & T^{(0)}{}_{N_1j} &= f_1, \end{aligned} \quad (29)$$

при $y = \bar{\Gamma}b$:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)}{}_{i0} &= 0, & \sigma_{xy}^{(0)}{}_{i0} &= 0, \\ \sigma_y^{(0)}{}_{iN_2} &= 0, & \sigma_{xy}^{(0)}{}_{iN_2} &= 0 \\ T^{(0)}{}_{i0} &= 0, & T^{(0)}{}_{iN_2} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

Из соотношения (9), могут быть найдены дополнительные граничные условия на границе прямоугольника:

при $x = \bar{\Gamma}a$:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)}{}_{0j} &= \sigma_y^{(0)}{}_{0,j+1} + h_2 \frac{\sigma_{xy}^{(0)}{}_{1j} - \sigma_{xy}^{(0)}{}_{0j}}{h_1}, \\ \sigma_y^{(0)}{}_{n_1j} &= \sigma_y^{(0)}{}_{n_1,j+1} + h_2 \frac{\sigma_{xy}^{(0)}{}_{n_1,j} - \sigma_{xy}^{(0)}{}_{n_1-1,j}}{h_1} \end{aligned} \quad (31)$$

при $y = \bar{\Gamma}b$:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)}{}_{i0} &= \sigma_x^{(0)}{}_{i+1,0} + h_1 \frac{\sigma_{xy}^{(0)}{}_{i1} - \sigma_{xy}^{(0)}{}_{i0}}{h_2}, \\ \sigma_x^{(0)}{}_{in_2} &= \sigma_x^{(0)}{}_{i+1,n_2} + h_1 \frac{\sigma_{xy}^{(0)}{}_{in_2} - \sigma_{xy}^{(0)}{}_{i,n_2-1}}{h_2} \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнения (25–28) составляют конечно-разностный аналог плоской частично-связанной задачи термоупругости краевой задачи и могут быть решены методом итераций.

Численные примеры. Этот раздел посвящен численному решению и обоснованию справедливости сформулированной термоупругой краевой задачи в напряжениях (17–20).

Пусть свободны от нагрузок прямоугольная пластина размером $l_1=2a$, $l_2=2b$ находится под действием температуры приложенной на противоположных сторонах, перпендикулярной оси ОХ (рис.2). Сеточные уравнения (25-32) составлены конечно-разностным методом. Уравнения решены итерационным методом это задача была решена в рассмотрена в [12] относительно перемещений.

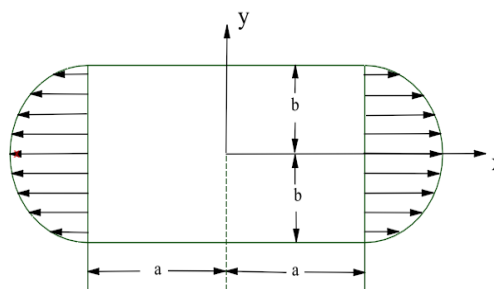


Рис 2. Прямоугольная пластина под действием температурной нагрузки параболической формы

В нашем случае эта задача описывается с дифференциальными уравнениями (25-28) относительно деформаций и температуры с соответствующими граничными (29-30) и дополнительными (31-32) граничными условиями. Конечно-разностные уравнения и граничные условия соответствующие этой краевой задаче (25-32) решается итерационным методом. При этом граничные условия имеют вид

при $x = \pm a$:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad T = T_0 \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$$

при $y = \pm b$:

$$\sigma_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad T = T_0 \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \quad (33)$$

В первой строке таблицы 1 приведены значения температурных напряжений σ_x в сечении $y=0$, и сравнены с результатами других авторов. При этом исходные данные имели следующие значения:

$$\lambda=0.7, \mu=0.75, a=1, b=1, h_1=h_2=0.2, T_0=15.$$

Для получения численных результатов потребовалось $k=32$ итераций. Близость полученных результатов показывает справедливости сформулированной краевой задачи в напряжениях и метода их решения.

Распределение напряжений σ_x по сечению пластины

Таблица 1.

Задачи $y=0$;	$x = -1$	$x = -0.8$	$x = -0.6$	$x = -0.4$	$x = -0.2$	$x=0$
В напряжениях	0.0	-0.9835	-1.3156	-1.5981	-1.7860	-1.8518
В перемещениях	0.0	-0.5772	-1.0973	-1.5103	-1.7755	-1.8669

На рис. 2 показан график распределения напряжения в центральной линии $y=0$. На этом рисунке пунктирная кривая линия σ_x построены по результатам задачи в напряжениях, а сплошная линия по решению задачи в перемещениях [12].

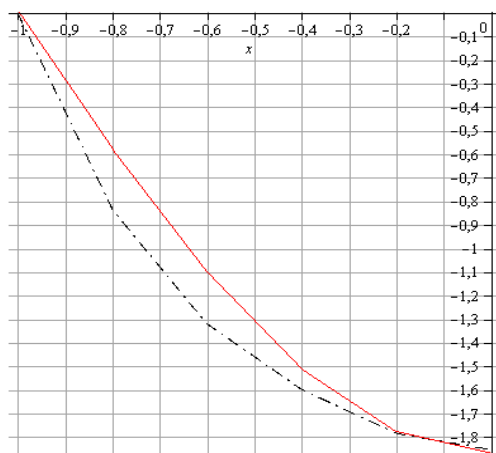


Рис 3. Распределение напряжений σ_x по сечению пластины $y=0$ по результатам краевой задачи в напряжениях (3.1 – 3.4) и перемещениях.

Как видно из рис. 3 результаты решенных краевых задач в напряжениях и перемещениях совпадают с некоторой погрешностью. Некоторые отклонения сплошной линии от пунктирной линии, можно связать по-видимому с погрешностью дифференцирования граничных условий, так как она имеет первый порядок аппроксимации.

В таблице 2 приведены значения температура $T(x,y)$. В таблице 2, с учетом условий симметрии, приведены результаты для одной четвертой части прямоугольника.

Распределение температуры $T(x,y)$ в пластине.

Таблица 2.

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
y=0	0	4.63525	8.81678	12.13525	14.26585	15
y=0.1	0	3.51870	6.69296	9.21207	10.82944	11.38674
y=0.2	0	2.74661	5.22436	7.19071	8.45319	8.88821
y=0.3	0	2.24344	4.26728	5.87341	6.90461	7.25994
y=0.4	0	1.95997	3.72809	5.13128	6.03218	6.34261
y=0.5	0	1.86847	3.55404	4.89171	5.75056	6.04649

Заклучение. В работе, в отличие от известных задач термоупругости, термоупругая краевая задача, сформулирована в виде системы частично-связанных дифференциальных уравнений Бельтрами-Митчела и уравнения теплопроводности с соответствующими термомеханическими граничными условиями. Рассмотрена плоская задача о свободной термоупругой пластине под действием температурных сил проложенных по противоположным сторонам прямоугольника. Дискретный аналог термоупругой задачи построен конечно-разностным методом относительно напряжений и температуры и решен численно итерационным методом. Сравнением результатов настоящей задачи с результатами аналогичной задачи относительно перемещений, обоснована справедливость сформулированных краевых задач и полученных численных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. – 256 с.
- [2] *Коваленко А. Д.* Термоупругость. К.: Вища шк., 1975. – 216с.
- [3] *Коваленко А. Д.* Развитие исследований в области термоупругости, термопластичности, термовязкоупругости. // Прикладная механика. 1969. Т.5. № 12. С. 1 – 16.
- [4] *Youssef H. M., Al-Felali A.S.* Generalized Thermoelasticity Problem of Material Subjected to Thermal Loading Due to Laser Pulse. Applied Mathematics, 2012, 3, С. 142–146.
- [5] *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. – 168 с.
- [6] *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В.* Математические модели теплопроводности и термоупругости. Самара: Самарский государственный технический университет, 2013, –877с.
- [7] *Рекач В.Г.* Руководство к решению задач прикладной теории упругости. М., 1973, –384 с.
- [8] *Khalidjigitov A.A., Qalandarov A., Nik M.A. Asri Long., Eshqivatov Z.* Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems. International journal of modern physics. Vol. 9, 2012. P. 503–510.
- [9] *Youssef H.M.* Theory of two-temperature-generalized thermoelasticity. IMA J. of applied mathematics. 2006. No. 71, P.383-390.
- [10] *Thein Wah.* Thermal Stresses in Elastic: Plates. Journal of Structural Mechanics 2007. doi.10.1080/03601218408907463
- [11] *Meleshko V. V.* Superposition method in thermal-stress problems for rectangular plates. International Applied Mechanics, Vol. 41, No. 9, 2005. DOI:10.1007/s10778-006-0012-4
- [12] *Халджигитов А.А., Каландаров А.К., Юсупов Ю.С.* Связанные задачи термоупругости и термопластичности. –Ташкент, «Фан ва технология», 2019, –193 с
- [13] *Filonenko-Borodich M.* Theory of Elasticity. University Press of the Pacific (November 6, 2003), 396 p.
- [14] *Borodachev N.M.* Stress Solutions to the Three-Dimensional Problem of Elasticity. Intern. Appl. Mech. 2006. 42 (8), P. 849-878.
- [15] *Победра Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент, Фан, 1988, –200 с.
- [16] *Li S., Gupta A.and Markenscoff X.* Conservation Laws of Linear Elasticity in Stress Formulations. Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. Vol. 461, No. 2053 (Jan. 2005), 99–116 p.

Дата поступления
19.06.2023

Халджигитов А.А., Тиловов О.У. Қисман боғланган термоэластиклик масаласини кучланишларда сонли ечиши

Аннотация: Бу иш Бельтрами-Митчелл тенгламалари ва иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари билан қисман боғланган термомеханик чегаравий масала келтирилган ва сонли ечишига бағишланган. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари кучланишларга боғлиқ бўлмаганлиги туфайли уни Бельтрами-Митчелл тенгламаларидан алохида ечиши мумкин. Шу билан бирга, масалани тўғри қўйиши учун мувозанат тенгламалари чегаравий шарт сифатида қаралади. Тўғри тўртбурчакнинг иккита қарама қарши томонига қўйилган температура таъсирида эркин пластинкага нисбатан термоэластикликнинг текис масаласи кўриб чиқилади. Масаланинг дискрет аналоғи чекли айирма усули билан тузилган ва итерация усули билан ечилган. Тузилган масалаларнинг натижалари ишончилиги худди шундай кўчишларга нисбатан ечилган натижалар билан солиштирилган.

Калит сўзлар: кучланиш; харорат; Бельтрами-Митчелл тенгламаси; чекли айирмали тенгламалар; итерацион усул; кўчиши.

Khalzhigitov A.A., Tilovov O.U. Numerical solution of partially coupled problem of thermoelasticity in stresses.

Abstract: This work is devoted to the formulation and numerical solution of a partially coupled boundary value problem in the framework of the Beltrami-Mitchel equations and the heat equation with the corresponding thermomechanical boundary conditions. Due to the independence of the heat equation from stresses, it can be solved separately independently of the Beltrami-Mitchel equations. At the same time, for the correct formulation of the boundary value problem, the equilibrium equations are considered as boundary conditions. A plane problem of thermoelasticity about a free plate under the action of temperature effects applied on two opposite sides of a rectangle is considered. The discrete analogue of the problem was compiled by the finite difference method and solved by the iteration method. The validity of the formulated boundary value problems and the results obtained are substantiated by comparison with the results of a similar thermoelastic displacement problem.

Keywords: stress; temperature; Beltrami-Mitchel equations; difference equations; iterative method; displacement.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР В СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНАХ

Ахмедов А.Б., Ибодуллаев Ш.Р., Кулдибаева Л.А.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: Ahmedov-1956@mail.ru

Аннотация: Рассматривается двумерная задача о стационарном распределении тепла в изотропной пластине, состоящая из трехслойного композитного материала вида «сэндвич». На одной границе задан тепловой поток температуры, а на других границах имеет место конвективный теплообмен. Решение получено в виде рядов Фурье. Приведены примеры расчета для слоистых материалов с разными коэффициентами теплопроводности и с разными толщинами пластин. Рассмотрена теоретическая возможность получения теплоизоляционного материала. Рассматриваемая задача для обоснования эффективности предложенного подхода решена имитационным моделированием на основе пакета прикладных программ Ansys Mechanical APDL 2022 R1.

Ключевые слова: теплопроводность; конвективный теплообмен; слоистая пластина; теплоизоляция.

В настоящее время в связи с бурным развитием композиционных материалов с заданными свойствами на первый план выходит создание материалов с оптимальными физико-механическими характеристиками.

Слоистые композиционные пластины и оболочки находят широкое применение в авиа-, судо- и градостроительных отраслях в качестве несущих элементов с улучшенными физико-механическими и теплофизическими характеристиками. Ведутся разработки по созданию огне-, тепло- и влагостойких материалов, пластин и пологих оболочек для пожарной безопасности обслуживающего персонала [1–4].

В статье предлагается новый подход построения неклассической теории распространения температуры в слоистых композиционных пластинах.

Поле температур трехмерного тела, находящейся под действием системы объемных источников температуры и поверхностного теплового воздействия в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнением теплопроводности [5–7]

$$\left(\lambda_{ij}\theta_{,j}\right)_{,i} + f(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

с линейными определяющими соотношениями между градиентом теплоты q_i и θ температуры

$$q_i = \lambda_{ij}\theta_{,j} \quad (2)$$

при выполнении и граничных условий

$$\theta|_{\Sigma} = \theta_{\Sigma}, \quad q_i n_i|_{\Sigma} = q_{\Sigma} \quad , \quad (3)$$

где $f(x, y, z)$ – объемные источники температуры, θ_{Σ} – заданная на поверхности температура, q_{Σ} – тепловой поток по нормальной координате, n_i – компоненты внешней нормали, λ_{ij} – коэффициенты теплопроводности $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Пусть декартова система координат Ox_1x_2z расположена в нижней плоскости слоистой композиционной пластины с постоянной толщиной – H . Зависимости модулей упругости слоистой пластины по координате z задаются в виде

$$\lambda_{ij}(x_1, x_2, z) = \lambda^{(1)}_{ij}(x_1, x_2)\chi(z_1 - z) + \lambda^{(N)}_{ij}(x_1, x_2)\chi(z - z_{N-1}) + \sum_{r=2}^{N-1} \lambda^{(r)}_{ij}(x_1, x_2)\chi(z_r - z)\chi(z - z_{r-1}) \quad (4)$$

где z_r – координаты раздела слоев композиционной пластины. Причем, $h_r = z_{r+1} - z_r$, $r=2,3,\dots,N-1$, $z_1=0$, $z_N=H$. Здесь $\chi(z)$ – функция Хевисайда.

Искомое решение задачи (1)–(3) с учетом (4) представим в виде:

$$\theta(x_1, x_2, z) = \theta^{(1)}(x_1, x_2, z)\chi(z_1 - z) + \theta^{(N)}(x_1, x_2, z)\chi(z - z_{N-1}) + \sum_{r=2}^{N-1} \theta^{(r)}(x_1, x_2, z)\chi(z_r - z)\chi(z - z_{r-1}) \quad (5)$$

В каждом «пакете» выполняется следующая система уравнения теплопроводности

$$\left(\lambda^{(r)}_{ij} \theta^{(r)}, j \right)_i + f = 0 \quad (6)$$

Для каждого r – «пакета» введем «быструю» переменную ξ с помощью замены переменных: $z = H\xi$. Искомое решение для каждого слоя r представим в виде полинома по ξ ,

$$\theta^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(r)}(\xi) \varphi_n(x), \quad (7)$$

где

$$Z_n^{(r)}(\xi) = C_n^{(r)} ch(\tilde{\gamma}_n \xi) + D_n^{(r)} ch(\tilde{\gamma}_n \xi),$$

Здесь $C_n^{(r)}$ и $D_n^{(r)}$ – подлежащие к определению неизвестные константы из граничных условий по нормальной координате при воздействии поля температур. При этом, на границе раздела $z = z_r$ для каждого r «пакета» выполняется условие неразрывности для полей температуры

$$\theta^{(r)} = \theta^{(r+1)}, \quad q_z^{(r)} = q_z^{(r+1)}, \quad r = 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

Рассмотрим следующий случай:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial z} + \alpha \theta^{(1)} = 0, & \text{при } \xi = 0, \\ q_z^{(1)} = q_z^{(2)}, \quad \theta^{(1)} = \theta^{(2)}, & \text{при } \xi = \frac{1}{2+k}, \\ q_z^{(3)} = q_z^{(2)}, \quad \theta^{(3)} = \theta^{(2)}, & \text{при } \xi = \frac{1+k}{2+k}, \\ \theta^{(3)} = \theta_{\Sigma}, & \text{при } \xi = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Будем считать, что слоистая трехслойная плита состоит из «пакета» композитных материалов. В данном случае, каждый рассматриваемый «пакет» является изотропной средой с различными коэффициентами теплопроводности $\lambda^{(r)}_{ij} = \lambda^{(r)\delta}_{ij}$ и различной толщиной h_r , причем $h_1 = h_3 = h$, $h_2 = kh$, при этом $h_1 + h_2 + h_3 = H$. В частности, если $k=0$ получим двухслойную пластину, если $\lambda^{(2)}=0$ и $k=1$, то имеем трехслойную пластину с теплоизоляционным внутренним слоем.

Для данной задачи введём «быструю» координату ξ : $z = H\xi$, $h = H/2 + k$.

На остальных гранях может иметь место конвективный теплообмен $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial z} + \alpha \theta^{(1)} \Big|_{\Sigma} = 0$

или задается температура окружающей среды $\theta^{(r)}=0$. Пусть в слоистом композите отсутствуют объемные источники тепла: $f(x, y, z)=0$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

при $k=0$ из условий (9) следует, что вместо трехслойного композита будем иметь двухслойный композит.

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial z} + \alpha \theta^{(1)} = 0, & \xi = 0, \\ q_z^{(1)} = q_z^{(2)}, \quad \theta^{(1)} = \theta^{(2)}, & \xi = \frac{1}{2}, \\ \theta^{(2)} = \theta_{\Sigma}, & \xi = 1. \end{cases} \quad (10)$$

при $k \rightarrow \infty$ из условий (9) следует, что рассматриваемая задача соответствует одно-
слойному варианту.

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial z} + \alpha \theta^{(1)} = 0, & \xi = 0, \\ \theta^{(1)} = \theta_\Sigma, & \xi = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Пусть θ_Σ будет выражаться следующим образом

$$\theta_\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \varphi_n(x), \quad (12)$$

где $q_n = 2\theta_\Sigma \int_0^1 \varphi_n(x) dx$ [8–10]. Вид функции зависит от граничных условий. Для граничных

условий $\theta^{(r)}=0$ при $x=0, l$ базисные функции примут вид: $\varphi_n(x) = \sin \frac{\pi(2n+1)}{l} x$, причем кра-
евые условия для конвективного теплообмена при $x=0, l$ удовлетворяется, если базисная
функция имеет вид $\varphi_n(x) = \sin \frac{\pi}{l} x - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{l} x$.

Если предположить, что существует теплоизоляционный материал, т.е. не пропуска-
ющей поток температуры, то решение задачи становится критическим случаем (коэффици-
ент теплопроводности материала $\lambda^{(r)}=0$) с чем вводим новое обозначение

$$\theta^{(r)} = \frac{\tilde{\theta}^{(r)}}{\lambda^{(r)}} \quad (13)$$

Учитывая (13), систему (9) можно записать следующим образом

$$\begin{cases} \lambda^{(1)} \frac{\partial \tilde{\theta}^{(1)}}{\partial z} + \alpha \tilde{\theta}^{(1)} = 0, & \xi = 0, \\ q_z^{(1)} = q_z^{(2)}, \quad \lambda^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)} = \lambda^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)}, & \xi = \frac{1}{2+k}, \\ q_z^{(3)} = q_z^{(2)}, \quad \lambda^{(2)} \tilde{\theta}^{(3)} = \lambda^{(3)} \tilde{\theta}^{(2)}, & \xi = \frac{1+k}{2+k}, \\ \tilde{\theta}^{(3)} = \lambda^{(3)} \theta_\Sigma, & \xi = 1. \end{cases} \quad (14)$$

Решение системы (9) для трехслойного случая можно записать в следующем виде:

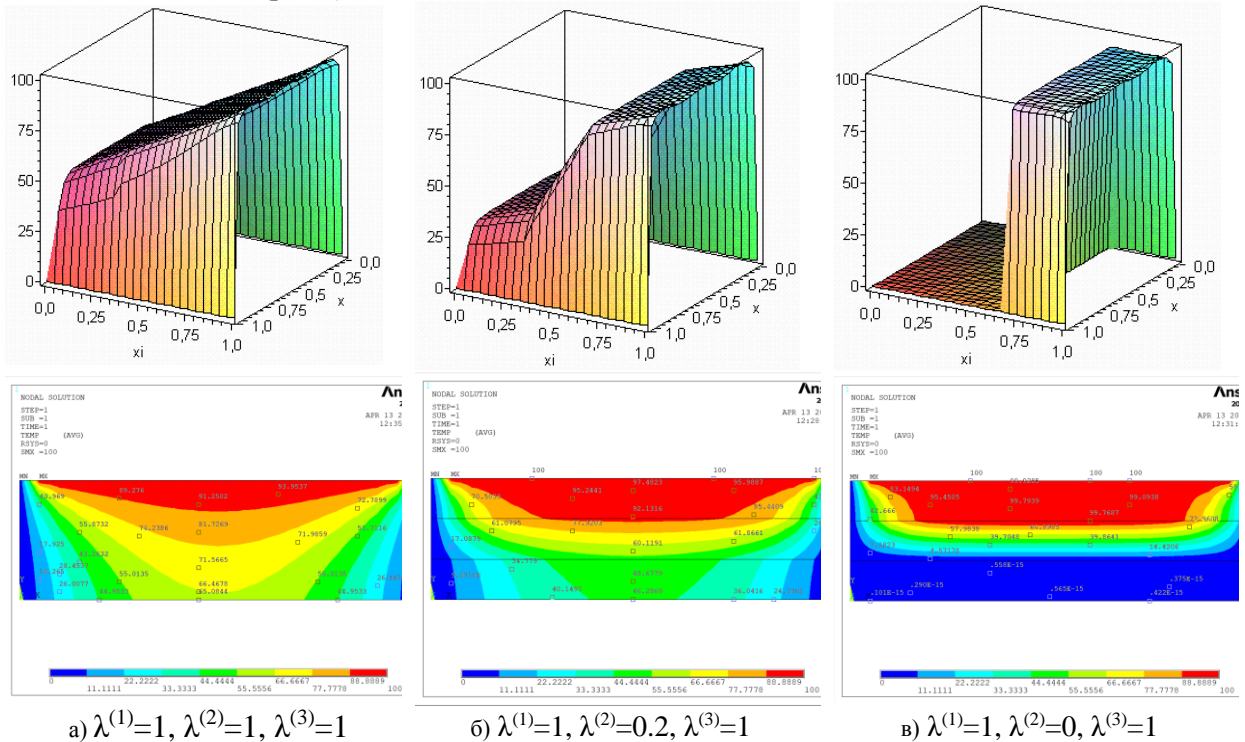
$$\left\{ \begin{aligned} \theta^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(2)} \lambda^{(3)} q_n \left(Bch\left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{2+k}\right) - Ash\left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{2+k}\right) \right)}{P \left(\lambda^{(1)} sh\left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{2+k}\right) - \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}_n} ch\left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{2+k}\right) \right)} \left(ch(\tilde{\gamma}_n \xi) - \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}_n} sh(\tilde{\gamma}_n \xi) \right) \varphi_n(x) \\ \theta^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(3)} q_n}{P} (Bsh(\tilde{\gamma}_n \xi) - Ach(\tilde{\gamma}_n \xi)) \varphi_n(x) \\ \theta^{(3)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n \left(\left(1 - \frac{\lambda^{(2)} sh(\tilde{\gamma}_n)}{P} G \right) ch(\tilde{\gamma}_n \xi) + \left(\frac{\lambda^{(2)} ch(\tilde{\gamma}_n)}{P} G - th\left(\frac{1+k}{2+k} \tilde{\gamma}_n\right) \right) sh(\tilde{\gamma}_n \xi) \right)}{\left(ch(\tilde{\gamma}_n) - sh(\tilde{\gamma}_n) th\left(\frac{1+k}{2+k} \tilde{\gamma}_n\right) \right)} \varphi_n(x) \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$\text{где } A = (\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}) \left(\lambda^{(1)} \operatorname{ch} \left(\frac{2\tilde{\gamma}_n}{2+k} \right) - \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}_n} \operatorname{sh} \left(\frac{2\tilde{\gamma}_n}{2+k} \right) \right) + \lambda^{(1)} (\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}),$$

$$B = (\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}) \left(\lambda^{(1)} \operatorname{sh} \left(\frac{2\tilde{\gamma}_n}{2+k} \right) - \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}_n} \operatorname{ch} \left(\frac{2\tilde{\gamma}_n}{2+k} \right) \right) + \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}_n} (\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}), \quad G = B - A \operatorname{th} \left(\frac{1+k}{2+k} \tilde{\gamma}_n \right),$$

$$P = \lambda^{(3)} \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{2+k} \right) \left(B \operatorname{sh} \left(\frac{1+k}{2+k} \tilde{\gamma}_n \right) - A \operatorname{ch} \left(\frac{1+k}{2+k} \tilde{\gamma}_n \right) \right) + \lambda^{(2)} \operatorname{sh} \left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{2+k} \right) \left(B \operatorname{ch} \left(\frac{1+k}{2+k} \tilde{\gamma}_n \right) - A \operatorname{sh} \left(\frac{1+k}{2+k} \tilde{\gamma}_n \right) \right)$$

При заданном на границе $\theta_{\Sigma}=100$ коэффициенте конвективного теплообмена $\alpha=1$ рассматривается задача для трехслойной пластины $k=1$ при различных значениях теплопроводности срединного слоя $\lambda^{(2)}=1; 0.2; 0$ (рис. 1).



а) $\lambda^{(1)}=1, \lambda^{(2)}=1, \lambda^{(3)}=1$

б) $\lambda^{(1)}=1, \lambda^{(2)}=0.2, \lambda^{(3)}=1$

в) $\lambda^{(1)}=1, \lambda^{(2)}=0, \lambda^{(3)}=1$

Рис. 1. График распределение температуры в трехслойной пластине при $\alpha=1; k=1$:
а) $\lambda^{(2)}=1$; б) $\lambda^{(2)}=0.2$; в) $\lambda^{(2)}=0$.

На рис. 1 приводится сравнение результатов, полученных предложенным подходом и с помощью комплекса прикладных программ Ansys. Характер полученных решений для постоянной температуры по соответствующим базисным функциям на краях становится тривиальным, эта особенность учтена в Ansys. Полученные результаты имеют удовлетворительные совпадения. Например, в нижней плоскости трехслойной пластины для коэффициента конвективного теплообмена $\alpha=1$ значения температуры соответствуют коэффициентам теплопроводности $\lambda^{(2)}=1, \lambda^{(2)}=0.2, \lambda^{(2)}=0$, т.е. приблизительно равны 50, 35, 0. Отсутствие температуры в нижней границе для нижней плоскости трехслойной пластины объясняется наличием теплоизоляционного среднего случая.

Как следует из полученных результатов при уменьшении теплопроводности $\lambda^{(2)} \rightarrow 0$ срединного слоя наблюдается скачкообразное уменьшение полей температуры до его тривиального значения в 1 и 2 слоях слоистой пластины. Этим самым показывается теоретическая возможность создания теплоизоляционного материала.

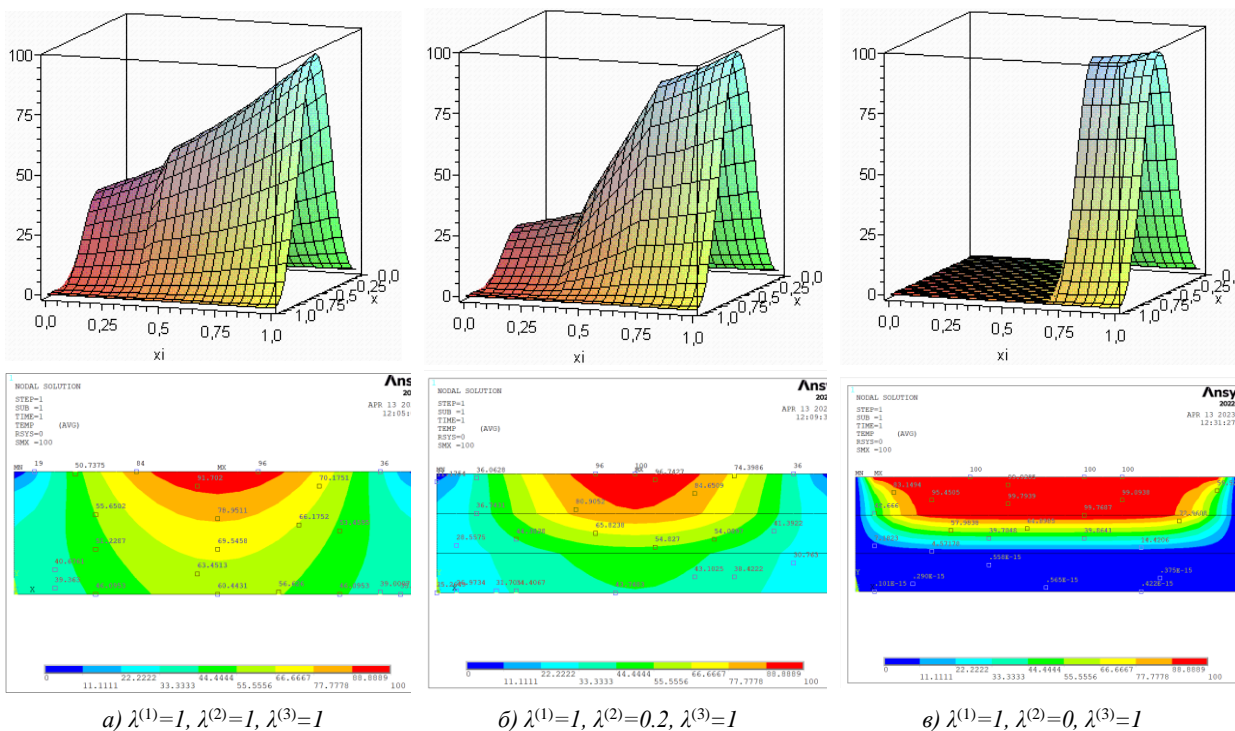


Рис. 2. Распределение температуры при воздействии параболической нагрузки при возможном теплообмене на краях трехслойной пластины $\alpha=1$; $k=1$: а) $\lambda^{(2)}=1$; б) $\lambda^{(2)}=0.2$; в) $\lambda^{(2)}=0$.

Возможность теплообмена на краях трехслойной пластины приводит к перераспределению в сторону сглаживания полученных эпюр. Исключение составляет наличие теплоизоляционного слоя, где вся температура, оставаясь в третьем слое, не распространяется на остальные слои.

Выводы

1. Предложен эффективный подход решения для задач теплопроводности в многослойных пластинах.
2. Наличие теплоизоляционного слоя в многослойных конструкциях может существенно изменить характер распределения поля температур.
3. Из полученных результатов будем иметь теоретическую основу для конструирования многослойных конструкций с заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Olenenko M., Velichko I.* Analytical solution of a problem of the stationary distribution of heat in anisotropic multilayer plates. // *New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering.* 2013. №1. 2013. С. 88-92. ISSN 1607-6885 [in Ukrainian].
- [2] *Havrysh V., Koliassa L., Vozna S.* Temperature field in a layered plate with local heating // *International scientific journal "Mathematical modeling".* 2021. ISSUE 3, P. 90-94. WEB ISSN 2603-2929; PRINT ISSN 2535-0986
- [3] *Власов В.В.* Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. – 223 с.
- [4] *Ахмедов А.Б.* Неклассические задачи пластин и пологих оболочек и разработка численных методов решения: Дисс. на соискание уч. степ. д.ф–м.н. Ташкент. 2016. – 243 с.
- [5] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970, –256 с.
- [6] *Партон В.З.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981, –688 с.
- [7] *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев, Наукова думка, 1970, –309 с.
- [8] *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978, –520 с.
- [9] *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. М.: Наука, 1979, С.198-203.
- [10] *Снеддон И.* Преобразование Фурье. Москва, Издательство иностранной литературы, 1955, –688 с..

Дата поступления
18.06.2023

Ахмедов А.Б., Ибодуллаев Ш.Р., Кулдибаева Л.А. Қатламли пластиналарда ҳарорат майдонининг тақсимланишини математик моделлаштириши.

Аннотация: "Сендвич" типдаги уч қатламли композит материалдан ташкил топган изотропик пластиналарда иссиқликнинг стационар тақсимланишининг икки ўлчовли муаммоси кўриб чиқилади. Температура оқими бир чегарада ўрнатилади ва бошқа чегараларда конвектив иссиқлик алмашинуви ўрнатилади. Йечим Фурье қатори шаклида олинади. Турли хил иссиқлик ўтказувчанлик коэффициентлари ва турли пластинка қалинлиги бўлган қатламли материаллар учун ҳисоблаш мисоллари келтирилган. Иссиқлик изоляцияловчи материални олишининг назарий имконияти кўриб чиқилади. Таклиф этилаётган ёндашувнинг самарадорлигини асослаш учун кўриб чиқиляётган масала Ansys Mechanical APDL 2022 R1 дастур пакетида асосида имитацион моделлаштириши йўли билан ечим аниқланган.

Калим сўзлар: иссиқлик ўтказувчанлиги; иссиқлик изоляцияси; конвектив иссиқлик узатиши; қатламли пластинка.

Akhmedov A.B., Ibodullaev Sh.R., Kuldibaeva L.A. Mathematical modeling of temperature field distribution in layered plates.

Abstract: A two-dimensional problem of the stationary distribution of heat in an isotropic plate consisting of a "sandwich"-type three-layer composite material is considered. Temperature heat flux is set at one boundary and convective heat transfer is set at the other boundaries. The solution is obtained in the form of a Fourier series. Calculation examples are given for layered materials with different thermal conductivity coefficients and different plate thicknesses. A theoretical possibility of obtaining a heat-insulating material is considered. To justify the effectiveness of the proposed approach, the problem under consideration was solved by simulation based on the Ansys Mechanical APDL 2022 R1 application package.

Keywords: thermal conductivity; thermal insulation; convective heat transfer; layered plate.

УДК 532.5.031

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ СУЖАЮЩИХСЯ– РАСШИРЯЮЩИХСЯ НАСАДОК

Закиров А.Х.

Национальный университет Узбекистана имени МирзоУлугбека, г.Ташкент, Узбекистан

E-mail: asqar_z@mail.ru

Аннотация: Представлена методика расчета гидродинамических параметров свободных струйных течений в плоской постановке, более доступной для решения прикладных задач. Рассмотрено истечение идеальной жидкости из сужающейся–расширяющейся насадки, прикрепленной к отверстию в вертикальной стенке. Формулируется математическая модель течения, в основу которой положены уравнения Эйлера для идеальной среды. Получена краевая задача для системы уравнений, описывающих стационарное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости. С помощью методов теории аналитических функций получено решение поставленной задачи.

Ключевые слова: струя; течение идеальной жидкости; потенциальное течение; методы теории аналитических функций; комплексная скорость; комплексный потенциал.

Введение. Процесс истечения жидкости через насадки достаточно хорошо изучен в работах [1–3], в которых широко представлены экспериментальные значения коэффициентов истечения и их зависимость от числа Рейнольдса. Использование отверстий и насадок для повышения их пропускной способности представляет практический интерес.

С.А. Чаплыгин впервые указал возможность математического анализа плоских струйных потенциальных течений сжимаемой жидкости и газа с дозвуковой скоростью [4]. Г. Кирхгоф решил задачи плоских потенциальных струйных течений несжимаемой жидкости: истечение струи из отверстия в стенке и обтекание пластинки с отрывом потока от её кромок и образованием застойной области. Вслед за его работой появилось много исследований, посвященных плоским струйным потенциальным течениям сжимаемой жидкости, в которых даны приближенные методы, основанные на нахождении решения в плоскости годографа скорости [5–7]. Проведена оценка коэффициента сжатия струи при истечении газа из отверстия при больших перепадах давления.

Исследованы особенности процесса истечения вязкой жидкости через отверстия некруглой формы [8]. Получены значения коэффициентов объёмного расхода воды, вытекающей через отверстия. Показано, что исследованные типы отверстий некруглой формы обладают большей, по сравнению с круглым отверстием, пропускной способностью. В диссертации [9] на основе единой математической модели найдены новые классы точных аналитических решений различных задач истечения жидкости из цилиндрического резервуара. Исследовано влияние геометрических параметров малых донных отверстий на основные гидродинамические характеристики процесса истечения жидкости.

В классической модели рассмотрена задача струйного двумерного течения [10], при которой гравитация и вязкость не учитываются. Описание этого идеализированного течения может быть сведено к задаче комплексного анализа, за исключением очень простых геометрий сопла. Представлена эффективная процедура численного решения задачи о струе в случае произвольного многоугольного сопла. В статье [11] представлен расширенный модифицированный метод Озеена Карриера, основанный на линеаризации вязкого члена преобразования фон Мизеса. Метод используется для определения поля скоростей, связанного с ламинарным осесимметричным струйным течением сжимаемого газа.

В работе [12] приведен метод расчета действительных параметров газа при истечении из отверстий и сопел с различной конфигурацией сужающейся их части по известным из опыта коэффициентам расхода. В рамках одномерной модели невязкой жидкости подтверждено, что в выходном сечении отверстия невозможно получить критические скорости. В работе [13] экспериментально исследован вертикальный водослив подтопленного и неподтопленного типов, для которого ширина отверстия на порядок меньше высоты. Для исследования разработана лабораторная установка, представляющая собой емкость-реактор, из которой непосредственно производится истечение. Статья [14] посвящена исследованию истечения из отверстия несимметричного сосуда в плоскости, определены основные гидродинамические параметры.

Актуальность теоретического исследования жидкости из сосудов при отсутствии внешних сил и вихрей вызвана практическим приложением, где основными вопросами являются определение скорости истечения, формы струи и коэффициента истечения. Если жидкость невязкая, то во многих случаях можно принять давление постоянным на поверхностях, отделяющих вытекающую жидкость от внешней среды. Другими примерами могут служить задачи о встрече струй, задачи об обтекании твердого тела струей конечной толщины и т.п.

Известно, что диффузорные насадки (комбинированные) представляют собой комбинацию конической насадки (сопла) и диффузора. Приставка диффузора к соплу влечет за собой снижение давления в узком месте насадки, а следовательно, увеличение скорости и расхода жидкости через него. Для получения скорости истечения больше критической необходимо использовать сопла Лавалья, имеющие сужающуюся и расширяющуюся части. В общем случае минимальное сечение сопла Лавалья не соответствует критическому, в котором достигается критическая скорость.

Цель исследования – изучение характеристики установившегося движения несжимаемой жидкости в насадках и теоретическое исследование действительного процесса истечения из насадок.

Постановка задачи. Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости из сужающихся-расширяющихся насадок, присоединенных к отверстию в вертикальной стенке (рис.1). Предполагается, что массовые силы и поверхностные натяжения отсутствуют. Струя жидкости, выходящая из насадок, образует свободную поверхность с неизвестной границей. Давление на границе струи равно давлению в окружающем пространстве, т.е. постоянно. Из интеграла Бернулли следует, что на свободной границе величина скорости постоянна.

Для определения плоского потока достаточно найти функцию скоростей $\bar{V} = V_0 e^{-i\theta}$, как функцию переменной $W = \varphi + i\psi$, где V_0 – величина скорости и θ – угол наклона скорости к оси x . Граница жидкости изображается линиями тока, поэтому в плоскости $W = \varphi + i\psi$ потоку соответствует некоторая область, ограниченная прямолинейными разрезами, параллельными вещественной оси.

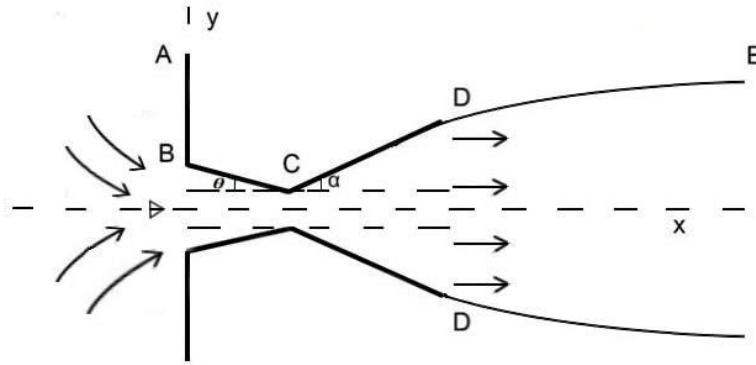


Рис.1. Область течения

Метод решения. Используем метод Н.Е.Жуковского. Для этого введем в рассмотрение аналитическую функцию [7]

$$\omega = \ln \frac{V_0}{V} = \tau + i\theta, \quad (1)$$

где $\tau = \ln \frac{V_0}{V}$, V_0 – модуль скорости на свободной поверхности.

Область, занятую движущейся жидкостью, отобразим на верхней половине параметрической плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ таким образом, чтобы точкам А, Е, D, С, В, А соответствовали на плоскости (ζ) значения $\zeta_E = -1$, $\zeta_D = 1$, $\zeta_C = c$, $\zeta_B = b$, а бесконечно удаленные точки на плоскостях z и ζ переходили друг в друга (рис.2).

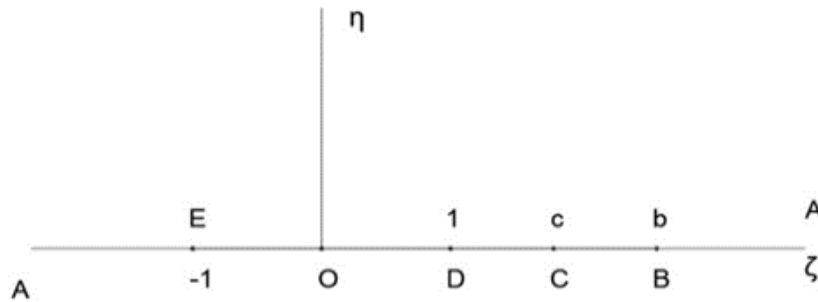


Рис. 2. Верхняя полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$

Согласно методу Н.Е.Жуковского, функции $\omega(\zeta)$ и $W(\zeta)$ выражаются через параметрическую переменную ζ , изменяющуюся в верхней полуплоскости, и вместо функции $z(\zeta)$ можно искать функцию $\omega(\zeta)$.

На действительной оси верхней полуплоскости (ζ) функция $\omega(\zeta)$ удовлетворяет следующим условиям:

- при $\eta = 0, -\infty < \xi < -1, Im \omega = 0$, на АЕ;
- при $\eta = 0, -1 < \xi < 1, Re \omega = 0$, на свободных границах DE и D_1E_1 ;
- при $\eta = 0, 1 < \xi < c, Im \omega = \alpha\pi$ на стенках насадки CD и C_1D_1 ;
- при $\eta = 0, c < \xi < b, Im \omega = -\beta\pi$, на стенках насадки BC и B_1C ;
- при $\eta = 0, b < \xi < \infty, Im \omega = -\frac{\pi}{2}$, на вертикальных стенках BA и B_1A_1 .

Теперь введем функцию $\omega_1(\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\zeta-1}}$, для которой имеем следующие граничные значения:

- при $\eta = 0, -\infty < \xi < -1, Im \omega_1 = 0$;
- при $\eta = 0, -1 < \xi < 1, Im \omega_1 = 0$;
- при $\eta = 0, 1 < \xi < c, Im \omega = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{\xi+1}\sqrt{1-\xi}}$;

при $\eta = 0$, $c < \xi < b$, $Im \omega = -\frac{\theta\pi}{\sqrt{\xi+1}\sqrt{1-\xi}}$;

при $\eta = 0$, $b < \xi < \infty$, $Im \omega_1 = -\frac{\pi}{2\sqrt{\xi+1}\sqrt{1-\xi}}$.

На всей границе области (ζ) известна мнимая часть функции $\omega_1(\zeta)$, и следовательно, ее можно восстановить согласно интегральной формуле Шварца [7]:

$$\omega_1(\zeta) = \alpha \int_1^c \frac{1}{\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}} \frac{dt}{t-\xi} - \theta \int_c^b \frac{1}{\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}} \frac{dt}{t-\xi} - \frac{1}{2} \int_b^\infty \frac{1}{\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}} \frac{dt}{t-\xi}.$$

При вычислении интеграла используем замену $\frac{1}{t-\zeta} = s$, и получим [8]

$$\int \frac{1}{\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}} \frac{dt}{t-\zeta} = -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \ln \left[\frac{\sqrt{1-\zeta} \sqrt{1+t} + \sqrt{1+\zeta} \sqrt{1-t}}{\sqrt{t-\zeta}} \right]$$

Опуская промежуточные выкладки, приведём окончательное выражение для функции $\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta) = \ln \left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-c}}{\sqrt{1+\zeta}\sqrt{c-1} + \sqrt{1+c}\sqrt{\zeta-1}} \right]^{2\alpha} \left[\frac{\sqrt{\zeta-c} \sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1} + \sqrt{b-1}\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{\zeta-b} \sqrt{\zeta-1}\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}\sqrt{\zeta+1}} \right]^{2\beta} \frac{\sqrt{b-\zeta}(\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta+1})}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1} + \sqrt{\zeta+1}\sqrt{b-1}}. \quad (2)$$

Из последнего выражения находим сопряженную комплексную скорость:

$$\bar{V} = V_0 \left[\frac{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{c-1} + \sqrt{c+1}\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-c}} \right]^{2(\beta+\alpha)} \left[\frac{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1} + \sqrt{b-1}\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-b}} \right]^{1-2\beta} \frac{1}{i(\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta+1})} \quad (3)$$

Разделяя действительную и мнимую части в (3), найдём распределение скоростей на каждом отрезке границы верхней полуплоскости:

вдоль ED: $-1 < \xi < 1$,

При $\eta = 0$, $-1 < \xi < 0$: $u = V_0 \cos[\beta_1(\xi)]$, $v = V_0 \sin[\beta_1(\xi)]$,

где

$$\beta_1(\xi) = 2(\beta + \alpha) \arctg \frac{\sqrt{1-|\xi|} \sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}\sqrt{|\xi|+1}} + (1-2\beta) \arctg \frac{\sqrt{1+|\xi|} \sqrt{b+1}}{\sqrt{b-1}\sqrt{1-|\xi|}} + \arctg \frac{\sqrt{1+|\xi|}}{\sqrt{1-|\xi|}}.$$

При $\eta = 0$, $0 < \xi < 1$,

$u = V_0 \cos[\beta_2(\xi)]$, $v = V_0 \sin[\beta_2(\xi)]$,

где

$$\beta_2(\xi) = 2(\beta + \alpha) \arctg \frac{\sqrt{1+\xi} \sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}\sqrt{\xi+1}} + (1-2\beta) \arctg \frac{\sqrt{1+\xi} \sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}\sqrt{1-\xi}} + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1+\xi}}.$$

Вдоль DC: $1 < \xi < c$,

$u = V_0 F_1(\xi) \cos[\pi(\alpha + 1)]$, $v = V_0 F_1(\xi) \sin[\pi(\alpha + 1)]$,

где

$$F_1(\xi) = \left[\frac{(\sqrt{1+\xi}\sqrt{c-1} + \sqrt{c+1}\sqrt{\xi-1})}{\sqrt{2}\sqrt{c-\xi}} \right]^{2(\beta+\alpha)} * \left[\frac{\sqrt{\xi-1}\sqrt{b+1} + \sqrt{b-1}\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{2}\sqrt{b-\xi}} \right]^{1-2\beta} \frac{1}{\sqrt{1+\xi} + \sqrt{\xi-1}}.$$

Отображение полосы шириной q на верхнюю полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ осуществляется аналитической функцией:

$$W(\zeta) = -\frac{q}{\pi} \ln(\zeta + 1) + iq, \quad (4)$$

где q – заданный расход жидкости.

С помощью функций $\frac{dW}{d\zeta}$ и $\bar{V}(\zeta)$ в указанных областях можно найти все геометрические характеристики области течения в физической плоскости (z). Конформно отображающую функцию $z = z(\zeta)$ находим из уравнения

$$dz = \frac{dW}{d\zeta} \left(\frac{dW}{dz} \right)^{-1} d\zeta,$$

где $\frac{dW}{d\zeta} = -\frac{q}{\pi} \frac{1}{\zeta+1}$.

Из этих формул получим:

$$dz = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{1}{\zeta+1} \left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-c}}{\sqrt{1+\zeta}\sqrt{c-1} + \sqrt{1+c}\sqrt{\zeta-1}} \right]^{2(\alpha+\beta)} \left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-b}}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1} + \sqrt{b-1}\sqrt{\zeta+1}} \right]^{1-2\beta} i(\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta+1}) d\zeta \quad (5)$$

Разделим действительную и мнимую части в выражении (5):

$$dx + idy = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{(\sqrt{1+|\xi|} - i\sqrt{1-|\xi|})}{1-\xi} [\cos \gamma(\xi) - i \sin \gamma(\xi)] d\xi, \quad -1 < \xi < 0, \quad (6)$$

$$dx + idy = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{(\sqrt{1-\xi} - i\sqrt{1+\xi})}{1+\xi} [\cos f(\xi) - i \sin f(\xi)] d\xi, \quad 0 < \xi < 1. \quad (7)$$

Здесь

$$\gamma(\xi) = 2(\alpha + \beta) \arctg \frac{\sqrt{1-|\xi|}\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}\sqrt{1+|\xi|}} + (1 - 2\beta) \arctg \frac{\sqrt{1-|\xi|}\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}\sqrt{1+|\xi|}};$$

$$f(\xi) = 2(\alpha + \beta) \arctg \frac{\sqrt{1+\xi}\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}\sqrt{1-\xi}} + (1 - 2\beta) \arctg \frac{\sqrt{1+\xi}\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}\sqrt{1-\xi}}.$$

Для нахождения уравнения свободной поверхности в параметрической форме достаточно проинтегрировать выражения (6) и (7):

$$dx = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{\sqrt{1+|\xi|} \cos \gamma(\xi)}{1-\xi} d\xi; \quad dy = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{\sqrt{1-|\xi|} \sin \gamma(\xi)}{1-\xi} d\xi, \quad -1 < \xi < 0;$$

$$dx = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{\sqrt{1-\xi} \cos f(\xi)}{1+\xi} d\xi; \quad dy = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{\sqrt{1+\xi} \sin f(\xi)}{1+\xi} d\xi, \quad 0 < \xi < 1.$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$, $c = 1$ получаем решение задачи об истечении идеальной несжимаемой жидкости из конической насадки, присоединенной к отверстию в вертикальной стенке [15]:

$$\bar{V} = V_0 \left[\frac{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1} + \sqrt{b-1}\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-b}} \right]^{1-2\beta} \frac{1}{i(\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta+1})}.$$

Результаты расчетов представлены на рис.3, 4. Показано распределение продольной и поперечной составляющих скорости в процессе истечения для различных значений α , β .

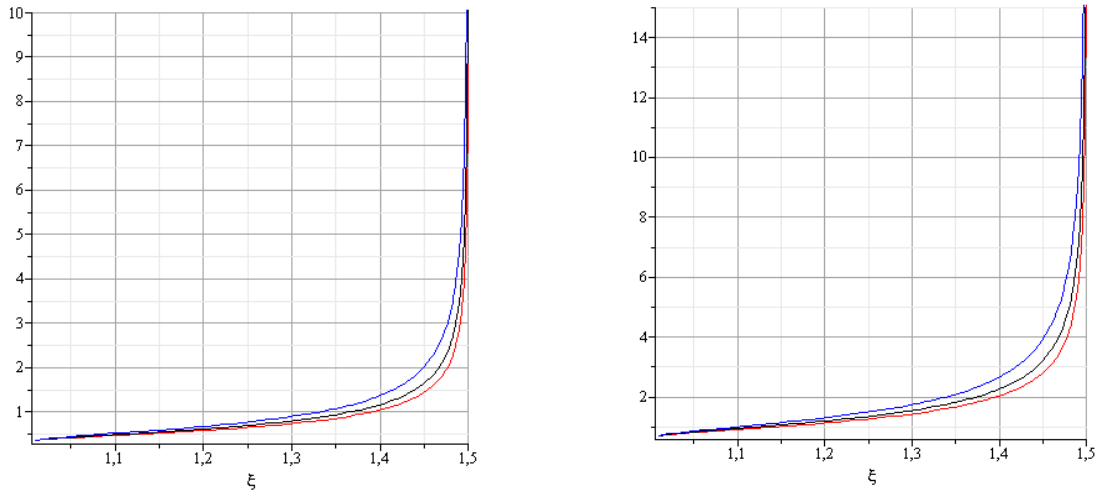


Рис. 3. Изменение безразмерных скоростей при истечении жидкости из насадок при $\alpha = 15^0$, $\beta = 10^0, 15^0, 20^0$

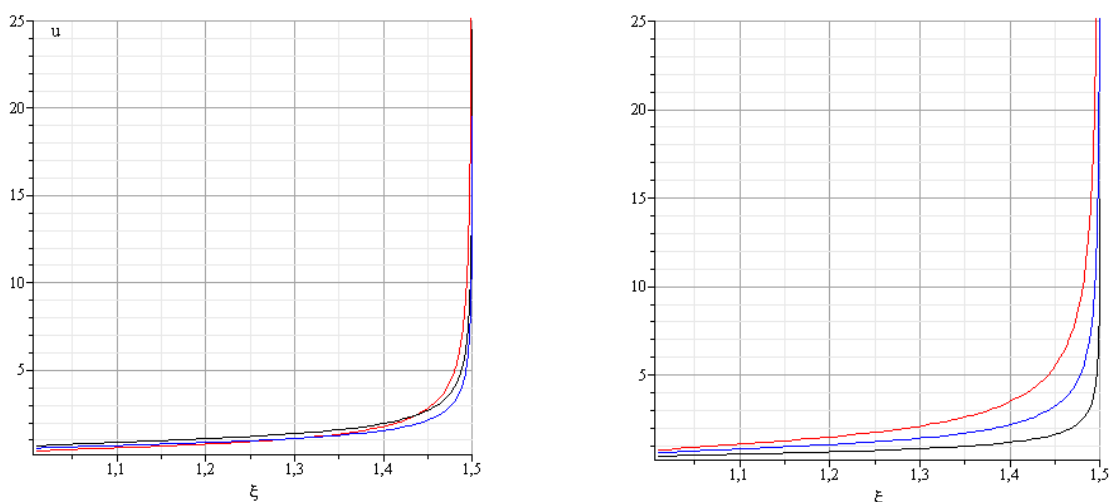


Рис. 4. Изменение безразмерных скоростей при истечении жидкости из насадок при $\beta = 15^\circ, \alpha = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$.

Заклучение. В статье рассмотрена плоская задача об истечении идеальной несжимаемой жидкости из сужающихся/расширяющихся насадок, присоединенных к отверстию в вертикальной стенке.

Получено аналитическое решение поставленной краевой задачи в верхней полуплоскости относительно функции Н.Е.Жуковского. Построены распределения скоростей истечения вдоль стенки насадок.

Результаты аналитического исследования режимов истечения жидкости из насадок показывают, что для расчета параметров истечения из насадок разной конфигурации его сужающейся части можно правильно оценить изменения основных параметров потока.

Представленную методику можно использовать для насадок с различным углом конусности образующих, для определения давления в зоне отрыва потока. Задачей дальнейших исследований является определение коэффициента сжатия струи и распределение давления при установившемся режиме истечения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кудинов А.А. Техническая гидромеханика. Москва. Эксмо, 2010, – 368 с.
- [2] Гусев А.А. Гидравлика. Москва. Юрайт, 2013.
- [3] Иванов В.И., Сазанов И.И., Схиртладзе А.Г. и др. Гидравлика. в 2 т. Москва. Академия, 2012.
- [4] Чаплыгин С.А. Избранные труды. МЖГ. Математика. Общая механика. Москва. Наука, 1976, – 496 с.
- [5] Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. Под редакцией Г.Ю.Степанова. Москва. Мир, 1964. –467 с.
- [6] Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. – Москва. Наука, 1979, – 536 с.
- [7] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. Москва. Наука, 1987. – 688 с.
- [8] Пильгунов В.Н., Ефремова К.Д. Особенности истечения жидкости через некруглые отверстия // Наука и образование МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электронный журнал 2015. № 2, С.1-23. DOI: 10.7463/0215.0758817
- [9] Аунг Зо Мо. Математическое моделирование процесса истечения жидкости из цилиндрических сосудов. Автореф. дисс. на соискание уч. степ. к.т.н. Москва. 2010. – 19 с.
- [10] Frédéric Dias, Alan R. Elcrat and Lloyd N. Trefethen. Ideal jet flow in two dimensions // Journal of Fluid Mechanics. 1987, Vol. 185, December, pp. 275-288. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112087003173>.
- [11] Kleinstein Gerald. An Approximate Solution for the Axisymmetric Jet of a Laminar Compressible Fluid. Quarterly of Applied Mathematics. 1961. 20.1.10.1090/qam/137416.
- [12] Лухтура Ф.И. К вопросу об установившемся режиме истечения газа из осесимметричных отверстий и сопел // Вестник Приазовского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2015, вып.30, Т. 1.
- [13] Каримов Л.А., Булкин В.А. Разработка установки для исследования истечения жидкости из вертикальных щелевых отверстий // Вестник Казанского технологического университета. 2013, том 16, вып. 22, С. 245-248.
- [14] Абылдаев М.Ю., Бегалиев А.М., Турсуналы кызы С. Истечение жидкости из коноидальной насадки в плоскости // Известия вузов Кыргызстана. 2017, № 5, С.44-47
- [15] Закиров А.Х. Истечение жидкости из конической насадки // ЎЗМУ хабарлари. 2015, № 2/1.
- [16] Закиров А.Х. Решение задачи несжимаемой жидкости из насадок / Материалы международной научно-практической интернет-конференции «Тенденции и перспективы развития науки и образования в условиях глобализации»: Переяслав-Хмельницкий, 2018, вып.42. С.405–407.

Дата поступления
21.06.2023

Закиров А.Х. Тораювчи-кенгаювчи найчалардан идеал суюқликни оқиб чиқиши.

Аннотация: Амалий масалаларни ечиш учун қулайроқ бўлган эркин сиртли суюқлик оқимларининг гидродинамик параметрларини ҳисоблаш усули келтирилган. Вертикал девордаги тешикка ўрнатилган тораювчи-кенгаювчи найчалардан идеал суюқликни оқиб чиқиши қаралган. Идеал муҳит учун Эйлер тенгламаларига асосланган оқимнинг математик модели тасвирланган. Идеал сиқилмайдиган суюқликнинг стационар потенциалли оқимини тавсифловчи тенгламалар системаси учун чегаравий масала олинган. Аналитик функциялар назарияси усуллари ёрдамида қўйилган масаланинг ечими олинган.

Калит сўзлар: струя; идеал суюқлик оқими; потенциал оқим; аналитик функциялар назарияси усуллари; комплекс тезлик; комплекс потенциал.

Zakirov A.Kh. Fluid outflow from converging-expanding nozzles.

Abstract: A method for calculating the parameters of free jet flows in a plane formulation, which is more accessible for solving applied problems, is presented. The flow of an ideal fluid from a narrowing-expanding nozzle attached to a hole in a vertical wall is considered. A mathematical model of the flow is formulated, which is based on the Euler equations for an ideal medium. A boundary value problem is obtained for a system of equations describing a stationary potential flow of an ideal incompressible fluid. With the help of the methods of the theory of analytic functions, the solution of the stated problem is obtained.

Keywords: jet; ideal fluid flow; potential flow; methods of the theory of analytic functions; complex velocity; complex potential.

УДК 621.01: 631.588

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭПИЦИКЛИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ШПИНДЕЛЯ В РАБОЧЕЙ КАМЕРЕ УБОРОЧНОГО АППАРАТА

Ризаев А.А., Кулдошев Д.А., Джураева Н.Б., Алимова Д.Б.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: rizaev52@mail.ru

Аннотация: Статья посвящена исследованию эпициклического вращательного движения шпинделя в рабочей камере вертикально-шпиндельного уборочного аппарата и оценки возможности захвата хлопка в технологическом процессе сбора урожая. На основе методов аналитической геометрии и кинематики точек на поверхности цилиндра, совершающего сложное плоскопараллельное движение, была решена обобщенная задача расчета активной составляющей вектора абсолютной скорости вершины зуба шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата, которая позволила оценить возможность вкалывания зуба (клина) в хлопчатник и захватывания его во время технологического процесса сбора. В среде программирования MathCAD 15 построены графики, описывающие закономерности изменения годографа вектора абсолютного движения вершины зуба шпинделя, абсолютной скорости и ее активной составляющей при заданных скоростных режимах работы хлопкоуборочной машины.

Ключевые слова: хлопкоуборочный аппарат; рабочая камера; барабан; шпиндель; эпициклическое вращение; траектория; скорость; активность.

Введение. Республика Узбекистан является одной из ведущих стран мира по возделыванию хлопчатника и поставке на мировой рынок продукции хлопковой отрасли. Поэтому механизация такого трудоемкого процесса, как уборка урожая, имеет большое социальное и экономическое значения и в настоящее время, когда вопросы экологии требуют незамедлительного решения, весьма перспективными становятся методы интенсивного рязового сбора хлопка-сырца. Для этого нужны хлопкоуборочные машины со стабильными агротехническими показателями и высокой производительностью.

Известно, что решающим фактором развития хлопководства в нашей стране является комплексная механизация процесса возделывания и уборки хлопчатника, которая также зависит от показателей работ хлопкоуборочных машин за счет повышения их надежности и производительности [1].

В области инновационного развития сельского хозяйства определены задачи по разработке и внедрению высокопроизводительных и ресурсосберегающих технологий в хлопководстве. В связи с этим исследования, направленные на улучшение качества работы и производительности отечественных вертикально-шпиндельных хлопкоуборочных машин за счет повышения их рабочих скоростей движения при сохранении агротехнических показателей в соответствии с установленными нормами, являются актуальными.

Разработка энерго-ресурсосберегающих хлопкоуборочных машин с высоким качеством работы и эффективностью тесно переплетаются с проблемами моделирования технологических и динамических процессов в их уборочных аппаратах [2, 3].

В настоящее время особое внимание уделяется моделированию динамических процессов взаимодействия волокон лутучек и долек хлопка со шпинделями вертикально и горизонтально-шпиндельных хлопкоуборочных машин хлопкоуборочных машин [4,5]. Исследования в данном направлении являются научной основой разработки и создания уборочного аппарата для сбора урожая хлопка, обеспечивающего снижение повреждаемости хлопкового волокна с сохранением его биологических качеств [4].

Как известно, за счет реверсивного вращательного движения шпинделей уборочного аппарата лучше сохраняется природное качество сбора хлопка из раскрытых коробочек хлопчатника вертикально-шпиндельной хлопкоуборочной машиной [1, 2, 6].

Исследованию технологических процессов в горизонтально и вертикально-шпиндельных уборочных аппаратах на основе использования скоростной киносъемки процессов захвата, наматывания хлопка на шпиндели и съема хлопка со шпинделей, а также и теоретическому обобщению технологического процесса в виде теории активности аппарата при различных направлениях вращения шпинделей посвящена работа М.В. Сабликова [2].

Изучению технологического процесса съема хлопка со шпинделей при их различных направлениях посвящены исследования З.Х.Иззатова [7]. Даны оценки технологических схем уборочного аппарата с гипо-эпициклическим, гипоциклическим, эпициклическим, и эпи-гипоциклическим приводами шпинделей. При этом съем хлопка со шпинделей осуществляется как по направлению зубьев, так и против направления. Эффективность работы съемника оценивалась по коэффициенту обработки щетками хлопка, намотанного на шпиндели. На лабораторном стенде были определены количество и качество снятого с поверхности шпинделя хлопка и волокна. Исследования З.Х. Иззатова подтвердили, что технологические схемы работы существующего, а также эпи-гипоциклического уборочных аппаратов являются более рациональными.

Проведенные работы [1,3,4,8,9] подтвердили, что высокая производительность вертикально-шпиндельной хлопкоуборочной машины достигается за счет увеличения количества одновременно обрабатываемых междурядий и скоростей движения машины, равных $6,2 \div 8,1$ км/ч при эпициклическом вращении шпиндельного аппарата. В результате анализа проведенных численных расчетов [9–11] было установлено, что повышение производительности серийной и усовершенствованной хлопкоуборочных машин с эпи и гипо-циклическими приводами шпинделей при одинаковой ширине захвата и одинаковых показателях агрофона обеспечивается за счет увеличения длины гона, повышении скорости хлопкоуборочной машины и полноты сбора урожая хлопка.

Цель работы – расчетные исследования эпициклического движения шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата при заданных конструктивных параметрах и режимах движения хлопкоуборочной машины.

Методы исследования. Для выполнения численных расчетов применены классические методы моделирования и вероятностного анализа технологических процессов взаимодействия хлопчатника со шпинделями уборочного аппарата на основе аналитической механики, теории механизмов и сельскохозяйственных (хлопкоуборочных) машин. Вычислительные эксперименты с графическими построениями закономерностей изменения исследуемых параметров проведены в среде программирования MathCAD 15.

Расчеты и обсуждение их результатов. Для повышения эффективности работы хлопкоуборочной машины существенное значение имеют технологические и технические решения, касающиеся изменения направления вращения шпинделей вертикально-шпиндельного хлопкоуборочного аппарата. Если шпиндели вращаются по направлению вращения барабана (эпициклический привод), тогда части растений, попавшие в промежутки между шпинделями и части растений, прижимаемые к шпинделям, будут перемещаться против направления движения машины [2, 10]. Вследствие этого есть вероятность увеличения съема хлопка-сырца за счет того, что на шпиндели наматывается все большее количество

непрерывно поступающих растений хлопчатника вместе с той частью растений, которые находились между шпинделями. Перемещение части растений при таком вращении шпинделей зависит от особенностей упругих связей между частями растений, то есть от формы, размеров и упругих свойств ветвей растений хлопчатника.

Как показали исследования, процесс втягивания и обжатия куста хлопчатника и его элементов через рабочую щель (рабочая зона), образованную двумя параллельно расположенными шпиндельными барабанами зависят от линейных скоростей вращения шпинделей, окружной скорости шпиндельного барабана и перемещения веток куста хлопчатника. Кроме этого, на эффективность сбора урожая влияют многие полевые условия, включая разнообразие формы, размер коробочек, степень раскрытия коробочек, размер растений и урожайность [2, 10, 11].

Научные работы авторов [2, 9] аналитическим методом на основе теории активности подтвердили эффективность съема хлопка со шпинделя при эпициклическом его вращении в рабочей камере уборочного аппарата. В этом направлении ранее было разработано техническое решение по практическому осуществлению данного способа вертикально-шпиндельным аппаратом [10]. При этом, если шпиндели одного барабана вращаются по направлению вращения барабана, то у противоположного барабана шпиндели вращаются против направления вращения барабана. По мнению авторов изобретения, данный технологический процесс обеспечивает снижение потери хлопка за счет раздвижения кустов хлопчатника, обкатываемых парными барабанами уборочного аппарата. Эти предложения послужили основой для выполнения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ [11].

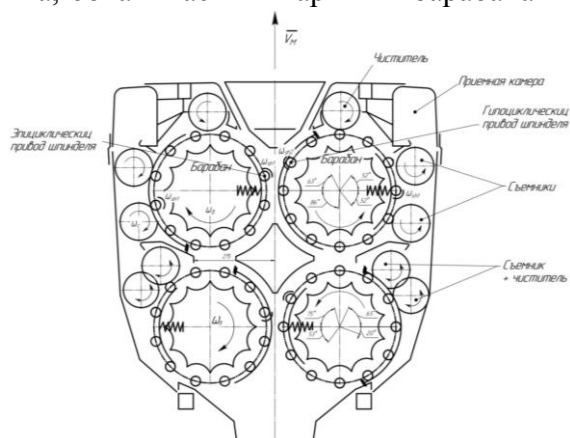


Рис.1. Принципиальная схема работы уборочного аппарата со встречными вращениями шпинделей (ВВШ) [11]

На основе унифицированной конструкции уборочного аппарата был разработан ряд вариантов экспериментального аппарата со встречными вращениями шпинделей с двухсторонней и двукратной обработкой кустов хлопчатника, в конструкцию которого были включены также очистители шпинделей (рис.1). Технологический процесс работы уборочного аппарата со встречными вращениями шпинделей описывается следующим образом. Шпиндели передних парно расположенных барабанов вращаются в одном направлении, воздействуя на кусты хлопчатника, с двух сторон раздвигая их плодовые ветки относительно друг друга. Шпиндели задних парно расположенных барабанов вращаются навстречу шпинделям передней пары [1, 13]. Поэтому в парно расположенных барабанах шпиндели совершают эпи и гипо-циклические движения. Кроме этого, перед входом в рабочую камеру шпиндели передних пар барабанов подвергаются воздействию очистителей, заимствованных из конструкции серийного щеточного съемника.

Благодаря изменению вращения шпинделей полнота сбора хлопка повысилась на 1.5...4.8% [11]. Однако в зоне съема хлопка со шпинделя щетки съемника воздействовали против направления зубьев шпинделя, что привело к образованию начесов волокна на поверхности шпинделя с гипоциклическим вращением [13]. Во время испытаний уборочные аппараты со встречными вращениями шпинделей были использованы на хлопкоуборочной машине ХФ-2,4 с малогабаритными барабанами. Уборочный аппарат с малогабаритными барабанами имеет повышенную активность, которая приводит к увеличению засоренности собранного хлопка сырца. Поэтому хлопок, собранный хлопкоуборочной машиной ХФ-2,4,

имеет повышенную засоренность. Это явление экспериментально зафиксировано в полевых испытаниях [1] и теоретически обосновано на основе эпюр активности шпиндельных барабанов, показанных на рис.2 [9].

Анализируя рис.2, видим, что на правом барабане активные поверхности шпинделей находятся ближе к внутренней части поджимной ячейки, а на левом барабане они ориентированы к растению хлопчатника. Далее эти поверхности шпинделей интенсивно приводят к движениям ветки кустов хлопчатника в противоположных направлениях, что в конечном итоге приводит к повышению засоренности собранного хлопка за счет крупных фракций отдельных элементов хлопчатника.

Данную тенденцию подтвердили результаты расчетов линейных скоростей наиболее удаленных точек шпинделей при эпи и гипо-циклических вращениях шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата. При входе в рабочую камеру при гипоциклическом вращении эта скорость равна 2.45 м/с, а в наиболее узкой части камеры скорость равна 1.41 м/с. Разница между скоростями составляет 2.31 м/с. При эпициклическом вращении линейные скорости соответственно равны 2.9 м/с и 2.16 м/с, а разница составляет 0.75 м/с [12]. Таким образом, полученные расчетные данные указывают на более стабильные скоростные режимы при эпициклическом вращении шпинделей в рабочей камере уборочного аппарата.

На основе анализа результатов сравнительных испытаний хлопкоуборочных машин с эпи и гипо-циклическими вращениями шпинделей в рабочей камере уборочного аппарата можно отметить:

- кинематические параметры (направление вращения шпинделей, величины абсолютных и активных скоростей точек на поверхности шпинделя) при встречно вращающихся шпинделях на последовательно расположенных парных барабанах способствуют повышению скорости движения машины и полноты сбора хлопка, но при этом возрастает засоренность собранного хлопка вследствие попадания в него крупных фракций элементов растения;

- гипоциклические вращения шпинделей в рабочей камере уборочного аппарата ограничивают рост скорости движения машины.

Поэтому одним из направлений, позволяющих повысить скорость движения машины и производительность её работы, является оптимизация технологического процесса в уборочном аппарате за счет изменения направления вращения шпинделей, то есть эпициклического движения точек на поверхности парно расположенных барабанов.

Как известно, эффективность работы шпиндельного уборочного аппарата определяется активностью зубьев шпинделей, расположенных на барабанах [2]. Несмотря на то, созданы различные графические и аналитические методы исследования активности шпинделя, отсутствует непосредственный способ расчета активных составляющих абсолютных скоростей точек на поверхности шпинделя, вращающегося по эпициклической траектории в рабочей камере уборочного аппарата.

На основе методов аналитической геометрии, кинематики точки на поверхности твердого тела, совершающего плоскопараллельное движение, разработано аналитическое выражение по расчету косоугольной проекции абсолютной скорости, т.е. ее активной составляющей и построены графики изменения активной скорости при эпи и гипо-циклическом вращениях шпинделя в рабочей камере аппарата [13].

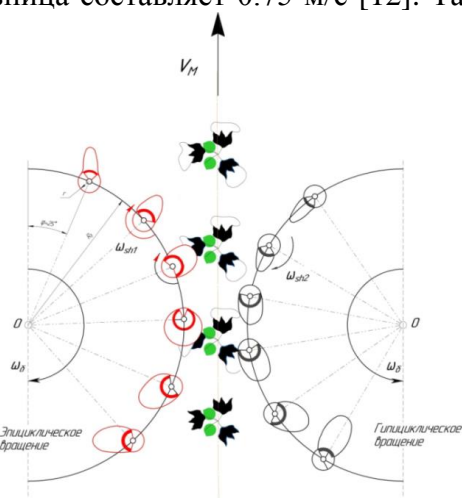


Рис.2. Эпюры активных скоростей по М.В. Сабликову [2] при эпи и гипо-циклических вращениях шпинделей на парно расположенных барабанах

На примере заданной геометрии зуба нарезного шпинделя [4, 9, 13] был разработан аналитический способ решения данной задачи с учетом расположения биссектрисы зуба под углом α относительно касательной к окружности сечения.

На основе данного способа была решена более обобщенная задача расчета активной составляющей вектора абсолютной скорости зуба шпинделя с учетом его расположения на шпинделе, угла трения и зострения клиновидной формы зуба, а также составлены выражения для определения направляющего угла вектора абсолютной скорости относительно биссектрисы угла заострения [13, 14].

Модуль вектора абсолютной скорости V_a зуба шпинделя в зависимости от направления вращения его в рабочей камере уборочного аппарата определяется [13] при:

- гипоциклическом движении:

$$V_a = \sqrt{V^2 + U^2 + V_m^2 - 2 \cdot [V_m V \sin(\Omega t - \varphi_0) + UV_m \sin(\omega_\delta t + \psi_0) + VU \cos(\psi_0 + \omega_{ut} t - \varphi_0)]}, \quad (1)$$

- эпициклическом движении [14]:

$$V_a = \sqrt{V^2 + U^2 + V_m^2 - 2 \cdot [V_m V \sin(\Omega t + \varphi_0) + UV_m \sin(\omega_\delta t + \psi_0) - VU \cos(\psi_0 - \omega_{ut} t - \varphi_0)]}, \quad (2)$$

где V – относительная линейная скорость некоторой точки A на поверхности шпинделя, $V=r \cdot \Omega$, (r – радиус шпинделя по вершинам зубьев), м/с; U – линейная скорость барабана по центрам расположения шпинделей, $U=R \cdot \omega_\delta$ (R – радиус барабана), м/с; V_m – скорость хлопоуборочной машины при сборе хлопка, м/с; Ω – абсолютная угловая скорость вращения шпинделя, равная при гипоциклическом вращении шпинделя $\Omega = \omega_{ut} - \omega_\delta$, при эпициклическом вращении $\Omega = \omega_{ut} + \omega_\delta$, м/с; $\omega_{ut}, \omega_\delta$ – соответственно угловые скорости вращения шпинделя и барабана, c^{-1} ; t – текущее время, с; φ_0, ψ_0 – характеризуют начальные положения шпинделя на барабане и зуба соответственно, рад.

Направляющий угол β вектора скорости V_a относительно касательной к окружности сечения шпинделя определяется [2,13] при:

-гипоциклическом движении:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_m \cos(\Omega t - \varphi_0) - U \sin(\psi_0 + \omega_{sh1} t - \varphi_0)}{V - U \cos(\psi_0 + \omega_{sh1} t - \varphi_0) - V_m \sin(\Omega t + \varphi_0)}, \quad (3)$$

-при эпициклическом движении [14]:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_m \cos(\Omega t + \varphi_0) - U \sin(\psi_0 - \omega_{sh1} t - \varphi_0)}{V + U \cos(\psi_0 - \omega_{sh1} t - \varphi_0) - V_m \sin(\Omega t + \varphi_0)}. \quad (4)$$

На основе расчетных формул (1) – (4) и построения графиков в среде программирования MathCAD 15 опишем закономерности изменения вектора абсолютной скорости V_a вершины зуба шпинделя и ее активной составляющей $V_{ак}$ при заданных скоростных режимах работы хлопоуборочной машины.

При выполнении расчетных исследований приняты первая и вторая скоростные режимы движения хлопоуборочной машины МХ-1,8. Для первого режима выбрана скорость машины $V_{m1}=1,13$ м/с, а для второго режима выбрана скорость $V_{m2}=1,45$ м/с.

Как правило, частота вращения барабанов зависит от условия неразрывности дольки, наматываемой на шпиндель. Исходя из этого частота вращения барабана на первой рабочей скорости составляет $\omega_{\delta 1}=11 c^{-1}$, что соответствует $n_\delta=100$ об/мин, а на второй рабочей скорости составляет $\omega_{\delta 2}=12.5 c^{-1}$, что соответствует $n_\delta=100$ об/мин.

Для проведения численных расчетов и построения графиков в среде программирования MathCAD 15 приняты следующие исходные кинематические параметры: радиус барабана $R_\delta=0.146$ м, радиус шпинделя $r=0.015$ м, радиус качения ролика шпинделя по ремням привода $r=0.013$ м, рабочие режимы работы аппарата и машины соответственно $\omega_{\delta 1}=11 c^{-1}$ при $V_{m1}=1.13$ м/с, $\omega_{\delta 2}=12.5 c^{-1}$ при $V_{m2}=1.45$ м/с, коэффициенты опережения барабана $k_0=1.14$ и $k_0=1.25$, угол заострения зуба $2\alpha=50^\circ$, положение биссектрис углов заострения $\theta_1=13^\circ$ и $\theta_2=25^\circ$, угол трения хлопка о материал зуба $\varphi_\tau=20^\circ$.

Расчеты выполнены с учетом следующих допущений:

1. Ролики шпинделей катятся без проскальзывания по ремням дуги коронного колеса (гипоциклическое вращение) или центрального колеса (эпициклическое вращение) планетарного механизма.

2. Наибольшая величина угла охвата роликов ремнями равна 180° ($\pi=3.14$) и время нахождения ролика в контакте с ремнями 0.3 с.

3. При заданных рабочих режимах хлопкоуборочной машины угол входа шпинделя в рабочую камеру аппарата определяется по формуле $\varphi_{вх}=\arcsin(1/k_0)$, где k_0 – коэффициент опережения барабана ($k_0=V_{\bar{o}}/V_M$, $V_{\bar{o}}$ –скорость барабана по центрам расположения шпинделей, V_M –скорость движения машины, м/с).

На основе этих допущений составлена программа расчетов кинематических и технологических параметров шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата и построены соответствующие графики [9,13,14].

На рис.3-5 показаны траектории заданной точки A на шпинделе при его гипо и эпициклическом движении, модуль вектора скорости этой точки и угол, определяющий направление данного вектора относительно касательной к окружности сечения шпинделя.

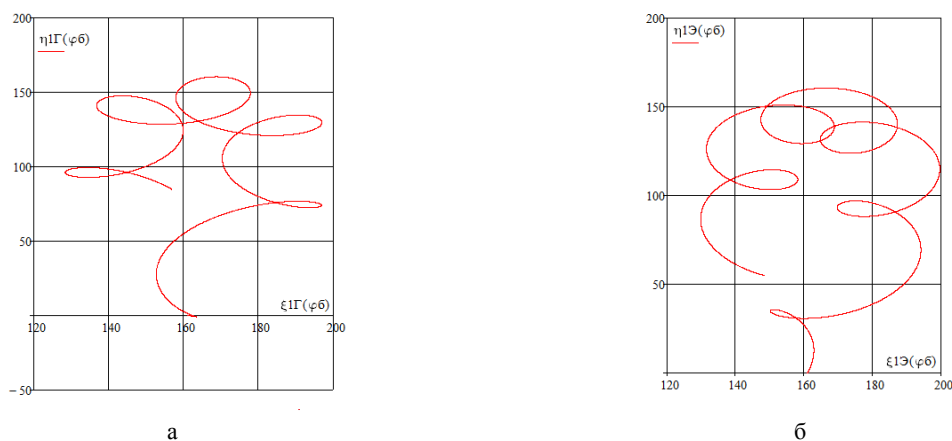


Рис.3.Графики изменения траекторий точки A (вершины зуба) при гипо (а) и эпи (б) циклических вращениях шпинделя в рабочей камере аппарата

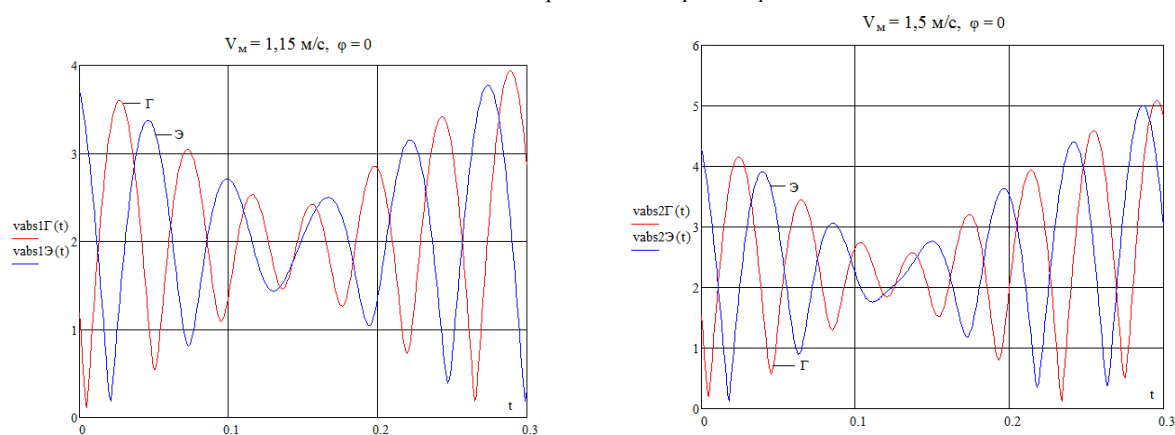


Рис.4.Графики изменения абсолютной скорости \overline{V}_a вершины зуба шпинделя в рабочей камере аппарата при гипо (Γ) и эпи (\mathcal{E}) циклических его вращениях и скорости движения машины $V_M=1.15$ м/с и 1.5 м/с

Анализируя график, представленный на рис.3 видим, что длина дуги, образованная траекторией точки A при эпициклическом движении шпинделя в рабочей камере, существенно больше, чем при гипоциклическом вращении. Кроме того в случае гипоциклического вращения образуются специальные петли, что согласуется с результатами ранее проведенных исследований [9]. Большая длина дуги, образованная траекторией точки A при

эпициклическом вращении, указывает на непрерывное наматывание хлопка на шпиндель после вкалывания зуба шпинделя в хлопковую массу.

Как видно из рис.4, при эпициклическом движении абсолютная скорость вершины зуба шпинделя меняется в пределах от 0.8 м/с до 3.4 м/с, а при гипоциклическом движении меняется в пределах от 0.6 м/с до 3.8 м/с. Более узкий диапазон скоростей также положительно влияет на первоначальное вкалывание зуба в хлопок и на его захват с последующим наматыванием на шпиндель. Особенно это важно при повышенной скорости движения хлопкоуборочной машины ($V_M = 1.5$ м/с).

Стабильность кинематических параметров при эпициклическом вращении подтверждает изменение направления вектора скорости V_a рассматриваемой точки относительно касательной к окружности сечения шпинделя, показанное на рис.5.

За период нахождения шпинделя в рабочей камере аппарата в пределах времени $t=0.06 \dots 0.2$ с эпициклическое вращение позволяет более стабильное сохранение направление вектора скорости V_a при повышенной скорости движения хлопкоуборочной машины $V_M=1.5$ м/с.

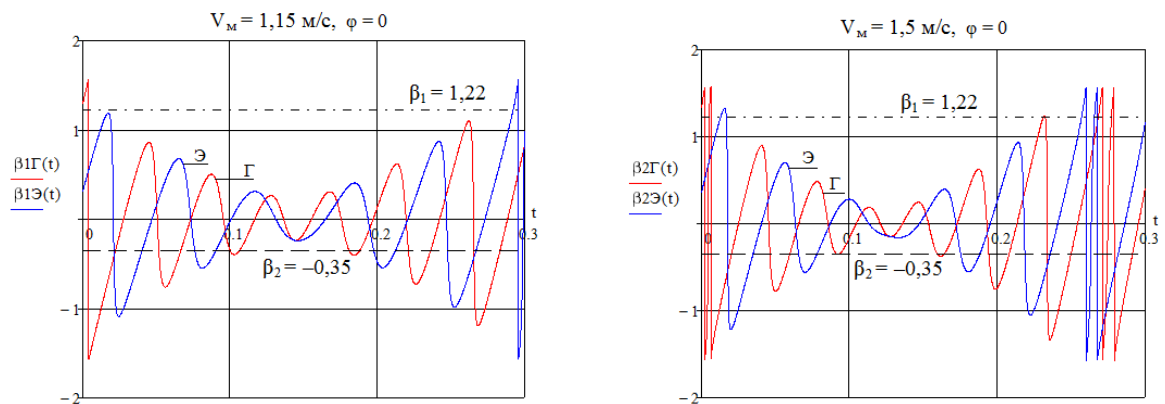


Рис.5. График направляющего угла β вектора \overline{V}_a при гипо и эпициклическом вращении шпинделя на барабане, а также скоростях машины $V_M=1.15$ м/с и 1.5 м/с

Известно, что надежность захвата хлопка шпинделем зависит от активной составляющей $V_{ак}$ (косоугольная проекция вектора V_a на биссектрису угла заострения зуба) вектора абсолютной скорости V_a вершины зуба шпинделя [14]. Для расчета активной скорости необходимо определить величину направляющего угла вектора абсолютной скорости относительно биссектрисы угла θ заострения зуба и угла φ_T трения хлопка о грани зуба.

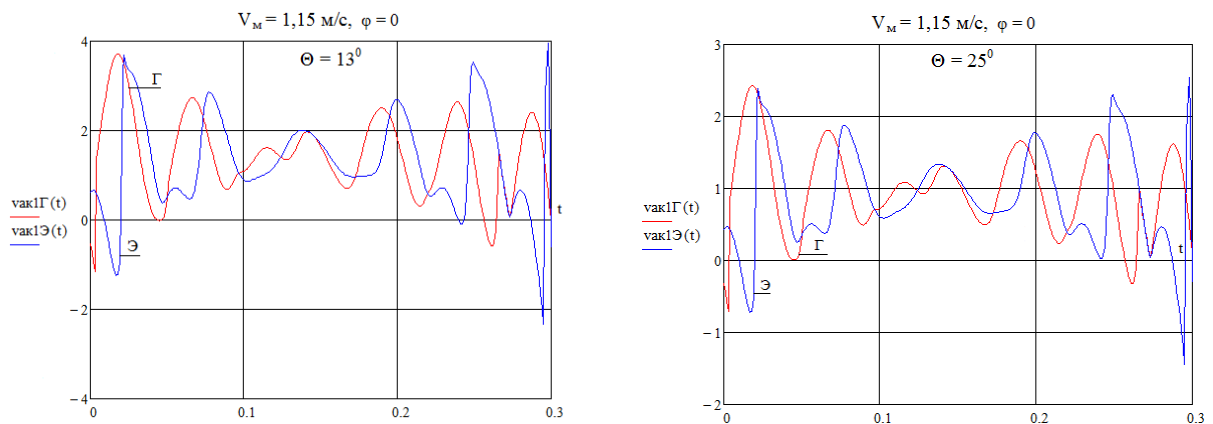


Рис.6. График изменения активной составляющей вектора скорости вершины зуба шпинделя в рабочей камере аппарата при гипо (Г) и эпи (Э) циклических его вращении при углах заострения $\theta = 13^\circ$ и $\theta = 25^\circ$

Расчеты проведены с учетом данных для универсального составного шпинделя $\theta = 13^\circ$ и серийного нарезного шпинделя $\theta = 25^\circ$ [14], угла трения $\varphi_t = 20^\circ$. В результате численных расчетов на рис.6 получен график активной составляющей вектора абсолютной скорости. Анализируя рис.6 видим, что вероятность надежности вкалывания зуба с биссектрисой угла $\theta = 13^\circ$ на 30% выше, чем при $\theta = 25^\circ$. Кроме этого при эпициклическом вращении шпинделей указанные выше кинематические параметры после входа шпинделя в рабочую камеру под углом $\varphi_{ex} = \arcsin(1/k_0)$ более стабильны, чем при гипоциклическом его вращении в уборочном аппарате.

Заключение.

1. На основе составленных аналитических выражений для определения кинематических параметров шпинделя, совершающего эпициклическое вращение в рабочей камере уборочного аппарата в среде MathCAD 15, построены изменения направления вектора абсолютной скорости V_a вершины зуба на шпинделе, а также активной составляющей данного вектора.

2. Разработан обобщенный аналитический способ определения активной составляющей абсолютной скорости зуба (клина) шпинделя с учетом ориентации клина на поверхности цилиндра и угла трения между хлопком и шпинделем при различных значениях проекций абсолютной скорости на касательную, проведенную к окружности сечения шпинделя.

3. Результаты анализа закономерностей изменения кинематических параметров уборочного аппарата показали эффективность эпициклического вращения шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата, позволившей повысить рабочие скорости вертикально-шпиндельных хлопкоуборочных машин от 1.15 м/с до 1.5 м/с на серийных хлопкоуборочных машинах типа МХ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Матчанов Р.Д.* Хлопкоуборочные машины 1929-2010 гг. Ташкент: Fan va texnologiyalar markaziy bosmahonasi. 2011. – 354 с.
- [2] *Сабликов М.В.* Хлопкоуборочные машины. М.:Агропромиздат.1985.–153 с.
- [3] *Глуценко А.Д., Тошболтаев М.Т.* Динамика и оптимизация хлопкоуборочного аппарата многократной обработки растений хлопчатника. – Ташкент: Фан. 1990. – 232 с.
- [4] *Глуценко А.Д. и др.* Моделирование динамических процессов в горизонтально-шпиндельных уборочных аппаратах. Ташкент: Фан. 2004.–163 с.
- [5] *Джураева Н.Б.* Численный анализ распределения давления и скорости движения куста хлопчатника через рабочую камеру хлопкоуборочного аппарата. //Проблемы механики. Ташкент. 2018. №4. С. 48-53.
- [6] *Шполянский Д.М.* Технологические основы параметров рабочих органов и схем хлопкоуборочных машин. Ташкент: Мехнат. 1985.–256 с.
- [7] *Иззатов З.Х.* Влияние направления вращения рабочих органов аппарата на процесс съема хлопка со шпинделей. // Сб. Хлопкоуборочные машины: теория и расчет. Под общ. ред. М.Т.Уразбаева. Ташкент: Фан. 1968. С.46-54.
- [8] *Усманходжаев Х.Х.* Теория механизмов и производительность хлопкоуборочных машин. Ташкент: Фан. 1990. -116с.
- [9] *Ризаев А.А., Худайкулиев Р.Р., Джураева Н.Б.* Расчет кинематических параметров эпициклического вращения шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата. // Проблемы механики. – Ташкент, 2022. №2. –С.74-84.
- [10] А.с. 247684 SU. Вертикально-шпиндельный хлопкоуборочный аппарата /авт. изобр. Зарубин Г.А., Чечель С.С., Розенблюм Л.М. Оpub. Б.И. №22 от 04.07.1969.
- [11] Отчет о НИР на тему: «Исследование и разработка новых технологических процессов сбора хлопка-сырца». Встречное вращение шпинделей (ВВШ). 4.1. Шифр 80.003-83. Ташкент: ГСКБ. 1984. – 87 с.
- [12] *Ризаев А.А., Усаров С., Йулдашев А.Т., Джураева Н.Б., Хунаров А.* Влияние направления вращения шпинделя на кинематику рабочей камеры аппарата. // Проблемы механики. – Ташкент, 2020. №1-2. С. 96-99.
- [13] *Rizaev A.A., Kuldoshev D.A, Dzhuraeva N.B, Normatov M. K.* Epi-and hypo-cyclic spindle drives of a cotton harvester. / AEGIS 2021, IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 868(2021) 012063 <https://doi.org/10.1088/1755-1315/868/1/012063>
- [14] *Rizaev A.A., Djuraeva N.B, Khunarov A.A.* Analytical method for determining the "active" speed of the spindle cotton harvester. / AEGIS-2022 IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 1076(2022) 012033. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/1076/1/012033>

Дата поступления
01.03.2023

А.А.Ризаев, Д.А.Кулдошев, Н.Б.Джурова, Д.Б.Алимова. Терим аппаратининг ишчи камерасида шпинделни эпициклик айланишининг тадқиқоти

Аннотация: Мақола вертикал шпинделли терим аппаратининг ишчи камерасида шпинделнинг эпициклик айланиш ҳаракати тадқиқоти орқали терим жараёнида пахтани шпиндел тишлари билан илиб олиш имкони аниқлашга қаратилган. Мураккаб текис параллел ҳаракатда бўлган цилиндрнинг юзасидаги нукта кинематикаси – траекторияси, абсолют ва фаол тезликларини ҳисоблаш асосида терим аппаратининг ишчи камерасида шпиндел учи тишининг чаноқдаги пахтага санчилиши ва уни илиб олишни баҳоловчи умумлашган масала ечилди. Аппарат ишчи камерасида турли айланма ҳаракатда бўлган шпинделнинг понасимон тишини пахта санчилиши имконини таҳлили учун бир қатор масалалар ечимлари келтирилди. MathCad-15 дастурлаш муҳитида пахта териш машинасининг берилган тезлик режимларида ва териш аппаратидан олинган бошланғич ўлчамлар асосида шпиндел тиши учининг абсолют ҳаракатдаги траекторияси, абсолют тезлиги ва унинг фаол компонентларининг ўзгариш қонуниятлари графиклари қурилди ва таҳлил этилди.

Калит сўзлар: пахта терим аппарати; ишчи камера; барабан; шпиндель; эпициклик айланиш; траектория; тезлик; фаоллик

A.A.Rizayev, D.A.Kuldoshev, N.B.Djuraeva, D.B. Alimova. Investigation of epicyclic movement of the spindle in the working chamber of the harvesting machine

Abstract: The article is devoted to the study of the epicyclic rotational movement of the spindle in the working chamber of a vertical spindle harvester and the assessment of the possibility of capturing cotton in the technological process of harvesting. Based on the methods of analytical geometry and kinematics of points on the surface of a cylinder performing a complex plane-parallel movement, the generalized problem of calculating the active component of the vector of the absolute velocity of the spindle tooth tip in the working chamber of the harvesting apparatus was solved, which allowed us to evaluate the possibility of inserting a tooth (wedge) into cotton and capturing it during the harvesting process. At the MathCAD 15 programming environment, graphs are constructed describing the patterns of change in the hodograph of the vector of absolute movement of the spindle tooth tip, absolute speed and its active component at given speed modes of operation of the cotton harvester.

Keywords: cotton harvester; working chamber; drum; spindle; epicyclic rotation; trajectory; speed, activity

УДК: 531:621-752:681

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ С ЖИДКОСТНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ

Ходжабеков М.У.

Самаркандский государственный архитектурно-строительный университет, Самарканд, Узбекистан
E-mail: uzedu@inbox.ru

Аннотация: В данной работе рассмотрена задача об устойчивости поперечных нелинейных колебаний упругой пластины с жидкостным динамическим гасителем при кинематических возмущениях. Для исследования устойчивости использован метод первого приближения Ляпунова и определено условие отрицательности действительной части корней характеристического уравнения с помощью критерия Рауса. Получены условия устойчивости виброзащищаемой пластины и проведен численный анализ результатов.

Ключевые слова: колебания; пластина; динамический гаситель; жидкостное звено; гистерезис; характеристическое уравнение; устойчивость.

Введение. Потребность в совершенствовании устройств защиты от вредных вибраций, применяемых в современной технике и технологиях, различных механических системах, математическое моделирование этих устройств, изучение динамики и исследование их устойчивости относятся к числу актуальных вопросов, требующих своего решения. В этой области было проведено много теоретических и экспериментальных исследований [1-8]. В частности, в них отмечается важность разработки методологии различных методов определения и подбора конструктивных параметров, оценки динамики систем, вопросов изучения устойчивости движения нелинейных сложных механических систем с учетом упруго-диссипативных характеристик материалов гистерезисного типа.

В работе [1] предложен гидродинамический гаситель колебаний, как эффективное решение проблемы обеспечения устойчивой и безопасной эксплуатации мостов. Функции гидродинамического гасителя колебаний заключаются в эффективном и быстром гашении колебаний при любом внешнем динамическом воздействии, обеспечении устойчивости использования только одного гидрогасителя колебаний для многопролетных конструкций, упрощении конструктивного решения.

В работе [2] рассмотрены демпфирующие характеристики пассивного гидродинамического гасителя колебаний, эффективно гасящего вредные колебания

инженерных систем. Рассмотрена и решена численными методами задача оптимизации по минимизации амплитуды колебаний в широком диапазоне частот с учетом ограничения максимального подъема жидкости в колоннах.

В работах [3, 4] сравниваются несколько типов жидкостных динамических гасителей. Показано, что свойства жидкостных совместных динамических гасителей можно изменять за счет использования различных форм, установки дополнительных барьеров внутри оболочки, окружающей жидкость, и использования различных типов жидкости.

В работе [5] проанализировано влияние динамического гасителя колебаний с жидкостным звеном на поведение нелинейных систем при узкополосных и широкополосных случайных воздействиях. На основе модели Бука-Вена получены диссипативные свойства системы гистерезисного типа. При анализе динамического характера системы использовался метод эквивалентной статистической линеаризации. Рассмотрены вопросы гашения вибрации и снижения энергии гистерезиса при различных значениях параметров из аналитических выражений среднеквадратичных значений.

В работе [6] для гашения низкочастотных колебаний буровой платформы использовался гидродинамический гаситель колебаний. Совместное уравнение движения гидродинамического гасителя колебаний и буровой платформы выводится и анализируется с использованием численных методов. Оценено взаимодействие гидродинамического гасителя колебаний при вращательном движении буровой платформы и достигнуто гашение крутильных колебаний при вращательном движении буровой платформы на низких частотах. Было показано, что гидродинамический гаситель колебаний на 80 % эффективнее, когда масса скважины составляет 10 % от массы буровой установки.

В работе [7] для гашения горизонтальных колебаний подводной платформы, вызванных внешними воздействиями при вращательных движениях в вертикальной плоскости, в качестве нового энергопоглощающего механизма был использован S-образный гидродинамический гаситель колебаний.

В работе [8] исследуется применение гидродинамического гасителя колебаний при гашении колебаний ветрогенераторов. В данном случае достигнуто применение гидродинамического гасителя колебаний в качестве объекта виброзащиты, в результате гашения вредных колебаний трубы ветрогенератора, что составляет 30% стоимости и достигнуто продление срока службы.

В работах [9,10] проводится математическое моделирование гидродинамического гасителя колебаний с несколькими столбами жидкости с использованием уравнений Лагранжа второго рода. Исследовано влияние количества колонок на эффективность гашения. Численные расчеты проводились для случаев, когда количество столбов равно 4 и 8. Показано, что количество колебаний уровня жидкости в первой колонке в 2 раза больше, чем в остальных колонках. Также решаются задачи совершенствования гидродинамического гасителя колебаний, его математического моделирования и оценки эффективности.

В работе [11], для повышения сейсмостойкости зданий, основание каждого этажа принимается в виде упруго-диссипативной характеристической пластины гистерезисного типа, а в систему здания добавляются дополнительные связи и демпфирование. Аналитически проанализировано повышение эффективности демпфирования здания при различных значениях параметров пластин.

В статье [12] изучались нелинейные колебания тонкой пластины с композитным покрытием под действием внешних сил и устойчивость стационарного движения. Изучались эффективность коэффициента демпфирования, частота и анализировалось влияние внешних сил на устойчивость стационарного движения пластины. Полученные численные решения для амплитудно-частотной характеристики сопоставлены с аналитическими решениями, которые проанализированы численно.

В работах [13-16] приведены результаты исследований динамики поперечных колебаний систем с упруго-диссипативными характеристиками гистерезисного типа в сочетании с динамическим гасителем колебаний с жидкостным звеном и определена их устойчивость. Определена область устойчивости в зависимости от параметров системы, проведен численный анализ и разработаны рекомендации.

Как следует из анализа отмеченных выше работ, вопрос исследования устойчивости поперечных колебаний виброзащищаемой низкочастотной пластины с упруго-диссипативными характеристиками гистерезисного типа является одной из наиболее актуальных задач.

В данной работе рассматривается задача исследования устойчивости поперечных колебаний упругой пластины с динамическим гасителем колебаний, включающим твердые и жидкие тела.

Система дифференциальных уравнений для нелинейных поперечных колебаний прямоугольной пластины с упруго-диссипативными характеристиками гистерезисного типа и динамического гасителя колебаний с жидкостным звеном под действием кинематических возбуждений имеет следующий вид [15]:

$$A\ddot{Q} + B\dot{Q} + CQ = F, \quad (1)$$

где

$$\ddot{Q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{ik} \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix}; \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{ik} \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} q_{ik} \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} u_{ik0}F_L + u_{ika}F_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} m_{ik} & 0 & 0 \\ (m_{13*} + m_2)u_{ik1} & m_{13*} + m_2 & m_2 + m_v \\ (m_2 - m_v)u_{ik1} & m_2 - m_v & m_2 + m_4 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -u_{ik1}b_F & 0 \\ 0 & b_F & 0 \\ 0 & 0 & b_S \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} c_{ik} & -u_{ik1}c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_2 \end{bmatrix};$$

q_{ik} – перемещения точек пластины; $m_{13*} = m_1 + m_3$; m_1 и q_3 – масса и перемещение внешнего корпуса динамического гасителя, соответственно; m_3 – масса жидкости; m_2 и q_4 – масса и перемещение твердого тела динамического гасителя колебаний, соответственно; m_4 – масса жидкости, присоединённой к твердому телу гасителя; b_F – коэффициент демпфирования; c_1 и c_2 – коэффициенты упругости; $F_L(t)$ и $F_R(t)$ – силы, представляющие собой кинематические возбуждения, расположенные между противоположными сторонами пластины; m_v – масса жидкости, вытесненной твердым телом гасителя; b_S – коэффициент вязкости жидкости [13]; m_{ik} и c_{ik} ($i, k = 1 \dots n$) – модальные массы и жесткости пластины, которые выражаются следующим образом:

$$m_{ik} = \iint_{00}^{ab} \rho h u_{ik}^2 dx dy;$$

$$c_{ik} = \left[(1 + D_0(-\eta_1 + j\eta_2)) \iint_{00}^{ab} \rho h u_{ik}^2 dx dy \right] +$$

$$+ \frac{3D}{\omega_{ik}^2} (-\eta_1 + j\eta_2) \sum_{R=1}^{s_1} D_R q_{ika}^R \frac{h^R}{2^R(R+3)} \iint_{00}^{ab} u_{ik} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \mu_n \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} + \mu_n \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial y^2} \right]^R + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\left(\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial y^2} + \mu_n \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial y^2} + \mu_n \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} \right]^R dx dy + \frac{6D}{\omega_{ik}^2} (1 - \mu_n) (v_1 - jv_2) \sum_{N=1}^{S_2} K_N q_{ika}^N \times \\ & \times \frac{h^N}{2^N (N+3)} \iint_{00}^{ab} u_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\left(\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x \partial y} \right) \left| \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x \partial y} \right|^N \right) dx dy + \frac{2D}{\omega_{ik}^2} (1 - \mu_n) \times \\ & \times (v_1 - jv_2) K_0 \iint_{00}^{ab} u_{ik} \frac{\partial^4 u_{ik}}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy \omega_{ik}^2; \end{aligned}$$

a, b – стороны и h – толщина пластины; ρ – плотность материала пластины; $u_{ik} = u_{ik}(x, y)$ – формы колебаний; $D_0, D_1, \dots, D_{S_1}, K_0, K_1, \dots, K_{S_2}$ – экспериментально определяемые коэффициенты петли гистерезиса, зависящие от демпфирующих свойств материала пластины [19]; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu_n^2)}$ – цилиндрическая жесткость; E – модуль Юнга; μ_n – коэффициент Пуассона; q_{ika} – амплитудные значения форм колебаний пластины; ω_{ik} – частоты колебаний пластины; $\eta_1, \eta_{22}, \nu_1, \nu_{22}$ – коэффициенты гармонической линеаризации [13]; $\nu_2 = \text{sign}(\omega_{ik})$; $\eta_2 = \eta_{22} \text{sign}(\omega_{ik})$; $j^2 = -1$; $u_{ik0} = u_{ik}\left(\frac{x}{2}, 0\right)$, $u_{ika} = u_{ik}\left(\frac{x}{2}, b\right)$ и $u_{ik1} = u_{ik}(x_1, y_1)$ – значения форм колебаний в точках закрепления и установки динамического гасителя колебаний соответственно.

Методика исследования. Решение системы дифференциальных уравнений движения (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} q_{ik}(t) &= q_{ika}(t) \cos(\omega t + \beta_{ik}(t)), \\ q_3(t) &= q_{3*}(t) \cos(\omega t + \beta_{3*}(t)); \\ q_4(t) &= q_{4*}(t) \cos(\omega t + \beta_{4*}(t)); \end{aligned} \quad (2)$$

где q_{ika}, q_{3*} и q_{4*} – амплитуды, β_{ik}, β_{3*} и β_{4*} – начальные фазы и медленно меняющиеся функции.

Для кинематических возбуждений рассматривается ускорение основания в следующем виде:

$$w_0 = \varepsilon p_0 \cos \omega t, \quad (3)$$

где εp_0 – амплитудное значение ускорения основания; $\varepsilon \ll 1$.

Вычислив соответствующие производные от решений (2) и подставив их в систему дифференциальных уравнений движения (1), с учетом выражения (3), получим следующую систему дифференциальных уравнений при условии, что коэффициенты перед соответствующими тригонометрическими функциями в обеих частях этих уравнений равны и выполнялись полученные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{ika} &= -(m_{ik}\omega)^{-1} (u_{ik1} b_F q_{3*} \omega \cos \beta_{3ik} + u_{ik1} c_1 q_{3*} \sin \beta_{3ik} + c_{2ik} q_{ika} + m_{ik} u_{ik*} \varepsilon p_0 \sin \beta_{ik}); \\ \dot{\beta}_{ik} &= -(m_{ik} q_{ika} \omega)^{-1} (u_{ik1} b_F q_{3*} \omega \sin \beta_{3ik} - u_{ik1} c_1 q_{3*} \cos \beta_{3ik} - c_{1ik} q_{ika} + \omega^2 m_{ik} q_{ika} \\ &+ m_{ik} u_{ik*} \varepsilon p_0 \cos \beta_{ik}); \\ \dot{q}_{3*} &= -(m_{ik} \omega \Delta)^{-1} (-\Delta (u_{ik1}^2 b_F q_{3*} \omega - u_{ik1} q_{ika} (c_{1ik} \sin \beta_{3ik} - c_{2ik} \cos \beta_{3ik}) + \\ &+ m_{ik} u_{ik*} \varepsilon p_0 \sin \beta_{3*}) - M_2 q_{4*} m_{ik} (\omega b_S \cos \beta_{43} + 2c_2 \sin \beta_{43}) + M_4 q_{3*} m_{ik} b_F \omega); \\ \dot{\beta}_{3*} &= -(m_{ik} \omega q_{3*} \Delta)^{-1} (\Delta (u_{ik1} q_{ika} (c_{1ik} \cos \beta_{3ik} + c_{2ik} \sin \beta_{3ik}) + (\omega^2 m_{ik} + u_{ik1}^2 c_1) q_{3*} \\ &- m_{ik} u_{ik*} \varepsilon p_0 \cos \beta_{3*}) - M_2 q_{4*} m_{ik} (\omega b_S \sin \beta_{43} - 2c_2 \cos \beta_{43}) - M_4 q_{3*} m_{ik} c_1); \\ \dot{q}_{4*} &= (\omega \Delta)^{-1} (M_3 q_{3*} (b_F \omega \cos \beta_{43} - c_1 \sin \beta_{43}) - M_1 q_{4*} b_S \omega); \\ \dot{\beta}_{4*} &= -(q_{4*} \omega \Delta)^{-1} (M_3 q_{3*} (b_F \omega \sin \beta_{43} + c_1 \cos \beta_{43}) + \Delta q_{4*} \omega^2 - 2M_1 q_{4*} c_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\beta_{3ik} = \beta_{3*} - \beta_{ik}$; $\beta_{43} = \beta_{4*} - \beta_{3*}$; $u_{ik*} = u_{ik0} + u_{ika}$; $M_1 = m_{13*} + m_{2*}$; $M_2 = m_{2*} + m_{\nu}$; $M_3 = m_{2*} - m_{\nu}$; $M_4 = m_{2*} + m_{4*}$; $\Delta = M_1 M_4 - M_2 M_3$.

Из системы дифференциальных уравнений (4) можно определить систему уравнений, описывающую стационарное движение рассматриваемой пластины и

динамического гасителя колебаний с жидкостным звеном при $\dot{q}_{ika} = 0, \dot{\beta}_{ik} = 0, \dot{q}_{3*} = 0, \dot{\beta}_{3*} = 0, \dot{q}_{4*} = 0, \dot{\beta}_{4*} = 0$.

$$q_{ika0} = |u_{ik*}| \varepsilon p_0 \sqrt{\frac{\Psi_1^2 + \Psi_2^2}{\Upsilon_1^2 + \Upsilon_2^2}}; q_{3*0} = |u_{ik*}| \varepsilon p_0 \sqrt{\frac{\Psi_3^2 + \Psi_4^2}{\Upsilon_1^2 + \Upsilon_2^2}}; q_{4*0} = |u_{ik*}| \varepsilon p_0 \sqrt{\frac{\Psi_5^2 + \Psi_6^2}{\Upsilon_1^2 + \Upsilon_2^2}}, \quad (5)$$

где $\Psi_1 = m_{ik}(c_1 - M_1\omega^2)(2c_2 - M_4\omega^2) - m_{ik}\omega^2(b_F b_S + M_2 M_3 \omega^2)$;

$\Psi_2 = ((c_1 - M_1\omega^2)b_S + (2c_2 - M_4\omega^2)b_F)m_{ik}\omega$;

$\Psi_3 = (2c_2 M_1 - \Delta\omega^2)m_{ik}u_{ik1}\omega^2$; $\Psi_4 = b_S M_1 m_{ik}u_{ik1}\omega^3$;

$\Psi_5 = c_1 M_3 m_{ik}u_{ik1}\omega^2$; $\Psi_6 = b_F M_3 m_{ik}u_{ik1}\omega^3$;

$\Upsilon_1 = -\Delta m_{ik}\omega^6 + ((2c_2 M_1 + c_1 M_4)m_{ik} + (m_{ik} + u_{ik1}^2 M_1)b_F b_S + \Delta(c_{1ik} + c_1 u_{ik1}^2))\omega^4 + (b_S M_1 + b_F M_4)c_{2ik}\omega^3 - (2c_1 c_2(m_{ik} + u_{ik1}^2 M_1) + (2c_2 M_1 + c_1 M_4 + b_F b_S)c_{1ik})\omega^2 - (b_S c_1 + 2c_2 b_F)c_{2ik}\omega + 2c_1 c_2 c_{1ik}$;

$\Upsilon_2 = (\Delta b_F u_{ik1}^2 + (b_S M_1 + b_F M_4)m_{ik})\omega^5 + \Delta c_{2ik}\omega^4 - ((b_S M_1 + b_F M_4)c_{1ik} + (m_{ik} + u_{ik1}^2 M_1)(b_S c_1 + 2c_2 b_F))\omega^3 - (2c_2 M_1 + c_1 M_4 + b_F b_S)c_{2ik}\omega^2 + (b_S c_1 + 2c_2 b_F)c_{1ik}\omega + 2c_1 c_2 c_{2ik}$.

Система дифференциальных уравнений (4) описывает невозбужденное движение пластины с динамическим гасителем колебаний.

Проанализируем эту систему (4) для получения уравнений возбужденного движения.

Из (4) можно получить дифференциальные уравнения движения возбужденной системы. Для этого рассмотрим решения, близкие к стационарному состоянию, следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{ika}(t) &= q_{ika0} + \delta q_{ika}(t); \beta_{ik}(t) = \beta_{ik0} + \delta \beta_{ik}(t); \\ q_{3*}(t) &= q_{3*0} + \delta q_{3*}(t); \beta_{3*}(t) = \beta_{3*0} + \delta \beta_{3*}(t); \\ q_{4*}(t) &= q_{4*0} + \delta q_{4*}(t); \beta_{4*}(t) = \beta_{4*0} + \delta \beta_{4*}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\delta q_{ika}(t), \delta q_{3*}(t), \delta q_{4*}(t), \delta \beta_{ik}(t), \delta \beta_{3*}(t), \delta \beta_{4*}(t)$ – достаточно малые значения.

Подставив (6) в систему дифференциальных уравнений (4), получим:

$\delta \dot{q}_{ika} = \varepsilon f_1(q_{ika0} + \delta q_{ika}(t), \beta_{ik0} + \delta \beta_{ik}(t), q_{3*0} + \delta q_{3*}(t), \beta_{3*0} + \delta \beta_{3*}(t), \omega)$;

$\delta \dot{\beta}_{ik} = \varepsilon f_2(q_{ika0} + \delta q_{ika}(t), \beta_{ik0} + \delta \beta_{ik}(t), q_{3*0} + \delta q_{3*}(t), \beta_{3*0} + \delta \beta_{3*}(t), \omega)$;

$\delta \dot{q}_{3*} = \varepsilon f_3(q_{ika0} + \delta q_{ika}(t), \beta_{ik0} + \delta \beta_{ik}(t), q_{3*0} + \delta q_{3*}(t), \beta_{3*0} + \delta \beta_{3*}(t), q_{4*0} + \delta q_{4*}(t), \beta_{4*0} + \delta \beta_{4*}(t), \omega)$; (7)

$\delta \dot{\beta}_{3*} = \varepsilon f_4(q_{ika0} + \delta q_{ika}(t), \beta_{ik0} + \delta \beta_{ik}(t), q_{3*0} + \delta q_{3*}(t), \beta_{3*0} + \delta \beta_{3*}(t), q_{4*0} + \delta q_{4*}(t), \beta_{4*0} + \delta \beta_{4*}(t), \omega)$;

$\delta \dot{q}_{4*} = \varepsilon f_5(q_{3*0} + \delta q_{3*}(t), \beta_{3*0} + \delta \beta_{3*}(t), q_{4*0} + \delta q_{4*}(t), \beta_{4*0} + \delta \beta_{4*}(t), \omega)$;

$\delta \dot{\beta}_{4*} = \varepsilon f_6(q_{3*0} + \delta q_{3*}(t), \beta_{3*0} + \delta \beta_{3*}(t), q_{4*0} + \delta q_{4*}(t), \beta_{4*0} + \delta \beta_{4*}(t), \omega)$,

где f_k ($k = 1, \dots, 6$) – обозначения функций в правых частях системы дифференциальных уравнений (4), соответственно.

Разложим правые части системы уравнений (7) по переменным вокруг стационарного состояния. Поскольку переменные $\delta q_{ika}(t), \delta q_{3*}(t), \delta q_{4*}(t), \delta \beta_{ik}(t), \delta \beta_{3*}(t), \delta \beta_{4*}(t)$ малы, ограничимся членами первого порядка

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_{ika} &= \varepsilon [f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_{ika}} \delta q_{ika} + \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{ik}} \delta \beta_{ik} + \frac{\partial f_1}{\partial q_{3*}} \delta q_{3*} + \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{3*}} \delta \beta_{3*}]; \\ \delta \dot{\beta}_{ik} &= \varepsilon [f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial q_{ika}} \delta q_{ika} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta_{ik}} \delta \beta_{ik} + \frac{\partial f_2}{\partial q_{3*}} \delta q_{3*} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta_{3*}} \delta \beta_{3*}]; \\ \delta \dot{q}_{3*} &= \varepsilon [f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial q_{ika}} \delta q_{ika} + \frac{\partial f_3}{\partial \beta_{ik}} \delta \beta_{ik} + \frac{\partial f_3}{\partial q_{3*}} \delta q_{3*} + \frac{\partial f_3}{\partial \beta_{3*}} \delta \beta_{3*} + \frac{\partial f_3}{\partial q_{4*}} \delta q_{4*} + \frac{\partial f_3}{\partial \beta_{4*}} \delta \beta_{4*}]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{\beta}_{3*} &= \varepsilon[f_4 + \frac{\partial f_4}{\partial q_{ika}}\delta q_{ika} + \frac{\partial f_4}{\partial \beta_{ik}}\delta\beta_{ik} + \frac{\partial f_4}{\partial q_{3*}}\delta q_{3*} + \frac{\partial f_4}{\partial \beta_{3*}}\delta\beta_{3*} + \frac{\partial f_4}{\partial q_{4*}}\delta q_{4*} + \frac{\partial f_4}{\partial \beta_{4*}}\delta\beta_{4*}]; \\ \delta\dot{q}_{4*} &= \varepsilon[f_5 + \frac{\partial f_5}{\partial q_{3*}}\delta q_{3*} + \frac{\partial f_5}{\partial \beta_{3*}}\delta\beta_{3*} + \frac{\partial f_5}{\partial q_{4*}}\delta q_{4*} + \frac{\partial f_5}{\partial \beta_{4*}}\delta\beta_{4*}]; \\ \delta\dot{\beta}_{4*} &= \varepsilon[f_6 + \frac{\partial f_6}{\partial q_{3*}}\delta q_{3*} + \frac{\partial f_6}{\partial \beta_{3*}}\delta\beta_{3*} + \frac{\partial f_6}{\partial q_{4*}}\delta q_{4*} + \frac{\partial f_6}{\partial \beta_{4*}}\delta\beta_{4*}].\end{aligned}$$

Поскольку левые части уравнений (4) равны нулю для стационарного состояния, то первые слагаемые в правой части уравнений (8) принимают нулевые значения. Тогда ищем решение системы линейных дифференциальных уравнений (8) следующим образом:

$$\delta q_{ika} = H_{1*}e^{\lambda t}; \delta\beta_{ik} = H_{2*}e^{\lambda t}; \delta q_{3*} = H_{3*}e^{\lambda t}; \quad (9)$$

$$\delta\beta_{3*} = H_{4*}e^{\lambda t}; \delta q_{4*} = H_{5*}e^{\lambda t}; \delta\beta_{4*} = H_{6*}e^{\lambda t},$$

где λ - характеристическое число; H_{k*} ($k = 1, \dots, 6$) - коэффициенты.

Подставим решения (9) в систему дифференциальных уравнений (8) и полагая коэффициенты H_{k*} отличными от нуля, формируем детерминантный вид характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & \dots & b_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{61} & \dots & b_{66} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}b_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial q_{ika}} = -(m_{ik}\omega)^{-1}(c_{2ik}q_{ika})'_{q_{ika}}; \\ b_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{ik}} = -(m_{ik}\omega)^{-1}(c_{1ik} - m_{ik}\omega^2)q_{ika}; \\ b_{13} &= \frac{\partial f_1}{\partial q_{3*}} = -(m_{ik}\omega)^{-1}(\omega b_F \cos \beta_{3ik} + c_1 \sin \beta_{3ik})u_{ik1}; \\ b_{14} &= \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{3*}} = -(m_{ik}\omega)^{-1}(-\omega b_F \sin \beta_{3ik} + c_1 \cos \beta_{3ik})u_{ik1}q_{3*}; \\ & \quad b_{15} = 0; b_{16} = 0; \\ b_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial q_{ika}} = -(m_{ik}\omega q_{ika})^{-1}(m_{ik}\omega^2 - (c_{1ik}q_{ika})'_{q_{ika}}); \\ b_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial \beta_{ik}} = -(m_{ik}\omega q_{ika})^{-1}c_{2ik}q_{ika}; \\ b_{23} &= \frac{\partial f_2}{\partial q_{3*}} = -(m_{ik}\omega q_{ika})^{-1}(\omega b_F \sin \beta_{3ik} - c_1 \cos \beta_{3ik})u_{ik1}; \\ b_{24} &= \frac{\partial f_2}{\partial \beta_{3*}} = -(m_{ik}\omega q_{ika})^{-1}(\omega b_F \cos \beta_{3ik} + c_1 \sin \beta_{3ik})u_{ik1}q_{3*}; \\ & \quad b_{25} = 0; b_{26} = 0; \\ b_{31} &= \frac{\partial f_3}{\partial q_{ika}} = (m_{ik}\omega\Delta)^{-1}\Delta u_{ik}((c_{2ik}q_{ika})'_{q_{ika}} \cos \beta_{3ik} - (c_{1ik}q_{ika})'_{q_{ika}} \sin \beta_{3ik}); \\ b_{32} &= \frac{\partial f_3}{\partial \beta_{ik}} = (m_{ik}\omega\Delta)^{-1}\Delta(c_{1ik} \cos \beta_{3ik} + c_{2ik} \sin \beta_{3ik})u_{ik1}q_{ika}; \\ b_{33} &= \frac{\partial f_3}{\partial q_{3*}} = (m_{ik}\omega\Delta)^{-1}(-\Delta u_{ik1}^2 - M_4 m_{ik})\omega b_F; \\ b_{34} &= \frac{\partial f_3}{\partial \beta_{3*}} = (m_{ik}\omega\Delta)^{-1}(\Delta(u_{ik1}^2 c_1 + m_{ik}\omega^2) - M_4 m_{ik} c_1)q_{3*};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{35} &= \frac{\partial f_3}{\partial q_{4*}} = (m_{ik}\omega\Delta)^{-1}(b_5\omega \cos \beta_{43} + 2c_2 \sin \beta_{43})m_{ik}M_2; \\
b_{36} &= \frac{\partial f_3}{\partial \beta_{4*}} = (m_{ik}\omega\Delta)^{-1}(-b_5\omega \sin \beta_{43} + 2c_2 \cos \beta_{43})m_{ik}M_2q_{4*}; \\
b_{41} &= \frac{\partial f_4}{\partial q_{ika}} = -(m_{ik}\omega q_{3*}\Delta)^{-1}\Delta u_{ik1}((c_{1ik}q_{ika})'_{q_{ika}} \cos \beta_{3ik} + (c_{2ik}q_{ika})'_{q_{ika}} \sin \beta_{3ik}); \\
b_{42} &= \frac{\partial f_4}{\partial \beta_{ik}} = -(m_{ik}\omega q_{3*}\Delta)^{-1}\Delta u_{ik1}q_{ika}(c_{1ik} \sin \beta_{3ik} - c_{2ik} \cos \beta_{3ik}); \\
b_{43} &= \frac{\partial f_4}{\partial q_{3*}} = -(m_{ik}\omega q_{3*}\Delta)^{-1}(\Delta(u_{ik1}^2 c_1 + m_{ik}\omega^2) - M_4 m_{ik} c_1); \\
b_{44} &= \frac{\partial f_4}{\partial \beta_{3*}} = -(m_{ik}\omega q_{3*}\Delta)^{-1}(-\Delta u_{ik1}^2 + M_4 m_{ik})\omega b_F q_{3*}; \\
b_{45} &= \frac{\partial f_4}{\partial q_{4*}} = -(m_{ik}\omega q_{3*}\Delta)^{-1}(-b_5\omega \sin \beta_{43} + 2c_2 \cos \beta_{43})m_{ik}M_2; \\
b_{46} &= \frac{\partial f_4}{\partial \beta_{4*}} = -(m_{ik}\omega q_{3*}\Delta)^{-1}(-b_5\omega \cos \beta_{43} - 2c_2 \sin \beta_{43})m_{ik}M_2q_{4*}; \\
b_{51} &= 0; b_{52} = 0; \\
b_{53} &= \frac{\partial f_5}{\partial q_{3*}} = (\omega\Delta)^{-1}(b_F\omega \cos \beta_{43} - c_1 \sin \beta_{43})M_3; \\
b_{54} &= \frac{\partial f_5}{\partial \beta_{3*}} = (\omega\Delta)^{-1}(b_F\omega \sin \beta_{43} + c_1 \cos \beta_{43})q_{3*}M_3; \\
b_{55} &= \frac{\partial f_5}{\partial q_{4*}} = (\omega\Delta)^{-1}(-M_1 b_5\omega); \\
b_{56} &= \frac{\partial f_5}{\partial \beta_{4*}} = (\omega\Delta)^{-1}(\Delta\omega^2 - 2c_2 M_1)q_{4*}; \\
b_{61} &= 0; b_{62} = 0; \\
b_{63} &= \frac{\partial f_6}{\partial q_{3*}} = -(q_{4*}\omega\Delta)^{-1}(b_F\omega \sin \beta_{43} + c_1 \cos \beta_{43})M_3; \\
b_{64} &= \frac{\partial f_6}{\partial \beta_{3*}} = -(q_{4*}\omega\Delta)^{-1}(-b_F\omega \cos \beta_{43} + c_1 \sin \beta_{43})q_{3*}M_3; \\
b_{65} &= \frac{\partial f_6}{\partial q_{4*}} = -(q_{4*}\omega\Delta)^{-1}(\Delta\omega^2 - 2c_2 M_1); \\
b_{66} &= \frac{\partial f_6}{\partial \beta_{4*}} = -(q_{4*}\omega\Delta)^{-1}M_1 b_5 q_{4*}\omega.
\end{aligned}$$

Отсюда можно вывести следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^6 + C_1\lambda^5 + C_2\lambda^4 + C_3\lambda^3 + C_4\lambda^2 + C_5\lambda^1 + C_6\lambda^0 = 0, \quad (11)$$

где C_k ($k=1, \dots, 6$) – коэффициенты характеристического уравнения, определяемые в зависимости от выражений $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{66}$.

Для того, чтобы движение было устойчивым достаточно, чтобы действительная часть корней его характеристического уравнения была отрицательной. На основании критерия Рауса можно показать, что действительная часть корней характеристического уравнения будет отрицательной. Для этого построим схему Рауса для характеристического уравнения (11) и в результате составим следующую систему неравенств:

$$C_1 C_2 - C_3 > 0, \quad (12)$$

$$C_7 C_3 - C_1 C_8 > 0, \quad (13)$$

$$C_{10} C_8 - C_{11} C_7 > 0, \quad (14)$$

$$C_{12} C_{11} - C_{10} C_{13} > 0, \quad (15)$$

$$C_{14}C_{13} > 0, \quad (16)$$

где $C_7 = C_1C_2 - C_3$; $C_8 = C_1C_4 - C_5$; $C_9 = C_1C_6$; $C_{10} = C_7C_3 - C_1C_8$; $C_{11} = C_7C_5 - C_1C_9$;
 $C_{12} = C_{10}C_8 - C_{11}C_7$; $C_{13} = C_{10}C_9$; $C_{14} = C_{12}C_{11} - C_{10}C_{13}$.

Согласно первому условию критерия Рауса, все коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительными. Вторым условием этого критерия являются неравенства (12)–(16). При выполнении двух выше указанных условий критерия, действительные части корней рассматриваемого характеристического уравнения будут отрицательными.

Для того, чтобы исследовать устойчивость движения системы, проанализируем границы и области устойчивости. Согласно первому условию критерия Рауса, движение должно быть устойчивым, если все коэффициенты характеристического уравнения (11) имеют положительное значение. Из аналитических выражений коэффициентов C_{1*} и C_{2*} можно сказать, что они являются положительными функциями от возможных значений аргументов. Проанализируем все остальные коэффициенты с помощью численных расчетов.

Численный расчет и анализ результатов. Проведем численные расчеты для точки, в которой обе противоположные стороны пластины жестко закреплены, а две другие стороны свободны, при этом динамический гаситель расположен посередине. Для этого случая получим форму колебаний в виде, найденном в [16] (выполняем расчеты для $i = k = 1$). Для проведения численных расчетов в качестве материала пластины возьмем алюминиевый сплав АЛ19 [17]:

$$E = 6964119 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; G = 26487 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \rho = 2780 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \mu_n = 0.32.$$

Толщина пластины $h = 3 \cdot 10^{-3}$ м, стороны пластины $a = b = 38 \cdot 10^{-2}$ м.

Определим коэффициенты, зависящие от диссипативных свойств материала пластины. Используем табл. 1 для нормального напряжения и декремента вибрации и табл. 2 для касательного напряжения и декремента вибрации в материале рассматриваемой пластины из алюминиевого сплава АЛ19 [17].

Таблица 1

$\sigma, (\text{кН}/\text{м}^2)$	29430	39240	58860	78480	98100
$f_1(\xi_*), (\%)$	0.36	0.45	0.57	0.65	0.69

Таблица 2

$\tau, (\text{кН}/\text{м}^2)$	9810	19620	29430	39240	49050
$f_2(\xi_*), (\%)$	0.1	0.1	0.28	0.63	1.04

На основании вышеприведенных таблиц и по методике, представленной в [19], определяем коэффициенты при первых трех членах логарифмических декрементов [13]

$$f_1(\xi_*) = D_1\xi_* + D_2\xi_*^2 + D_3\xi_*^3; \quad (17)$$

$$f_2(\xi_*) = K_1\xi_* + K_2\xi_*^2 + K_3\xi_*^3, \quad (18)$$

$$D_1 = 10.6662475; D_2 = -55.22539871 \cdot 10^2; D_3 = 10.43466067 \cdot 10^5;$$

$$K_1 = 6.570000005; K_2 = -13.85100002 \cdot 10^3; K_3 = 91.85400011 \cdot 10^5;$$

Коэффициенты линеаризации следующие [13]:

$$v_1 = \eta_1 = \frac{3}{4}, v_{22} = \eta_{22} = \frac{1}{\pi},$$

тогда

$$c_{111} = 4198.222003 - 22146.23517q_{11a} - 1721230.096q_{11a}^2 - 705218.2446q_{11a}^3; \quad (19)$$

$$c_{211} = 9399.154126q_{11a} + 730512.7413q_{11a}^2 + 299303.9188q_{11a}^3.$$

Параметры динамического гасителя колебаний с жидкостным звеном следующие [18]:

$$b_s = 8\pi\rho_1\nu r_*^4 \varepsilon_1^{-3}; m_4 = \frac{4}{5}\pi\rho_1 r_*^4 \varepsilon_1^{-1}; \nu = \frac{\lambda_*\mu_*}{\lambda_*(1 + \mu_*) + 1}; \nu \in [-\lambda_*, 1], \quad (20)$$

где ρ_1 и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно; r_* – радиус корпуса внутри жидкости динамического гасителя; ε_1 – зазор между первым и вторым телами; $\lambda_* = \frac{m_\nu}{m_4}$; $\lambda_* \in (0, 2]$; $\mu_* = \frac{m_2 - m_\nu}{m_\nu}$; $\mu_* \in [-1, \infty]$.

$$\mu_* = 1.78; \nu = 0.379 \frac{\text{М}^2}{\text{с}}; r_* = 0.008 \text{ м}; \rho_1 = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}; \varepsilon_1 = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

$$b_S = 2495.2 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}}; m_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ кг}; m_2 = 596 \cdot 10^{-5} \text{ кг}; m_3 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3} \pi ((r_* + \varepsilon_1)^3 - r_*^3) = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; m_4 = 4.18 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; m_\nu = 2.15 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Амплитудное значение ускорения основания $\varepsilon r_0 = 0.001 \text{ м}$.

Строим графики по условиям устойчивости, исходя из заданных значений параметров.

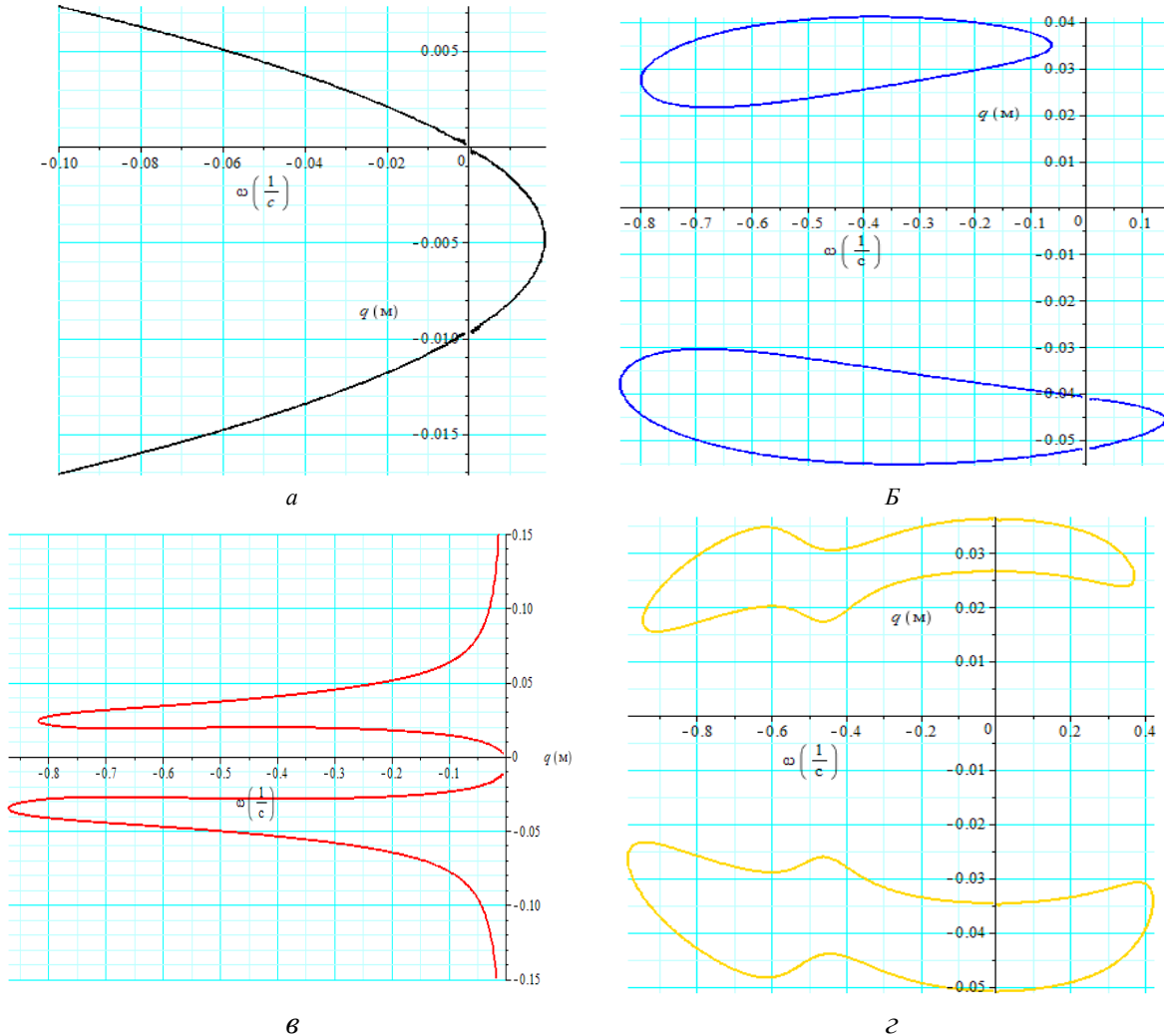


Рис. 1. Устойчивые и неустойчивые области, определяемые коэффициентами характеристического уравнения (11) по первому условию критерия Рауса

Рис.1,а,б,в,г, соответственно, характеристическое уравнение (11) графики коэффициентов $C_3, C_4, C_5,$ и C_6 , когда $c_1 = 1.2 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{М}}; b_F = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}}; c_2 = 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$ описано.

Из графиков на этих рисунках видно, что график функции C_{6*} имеет неустойчивую область при возможных значениях аргументов $q_{11a} \geq 0, \omega \geq 0$. Все остальные графики коэффициентов показывают, что на поле $q_{11a} \geq 0, \omega \geq 0$ нет неустойчивой области. Следовательно, условие $C_6 > 0$ для всех коэффициентов является условием устойчивости и $C_6 = 0$ является границей устойчивости. Условие $C_6 > 0$ позволяет перейти ко второму условию критерия Рауса.

Анализируем неравенства (12)–(16) по второму условию критерия Рауса.

На рисунке 2, а, б, в, г, д – даны изображения, соответственно, области устойчивого и неустойчивого движения, определяемые вторым условием критерия Рауса (12)–(16) для случая, когда $c_1 = 1.2 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $b_F = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$; $c_2 = 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

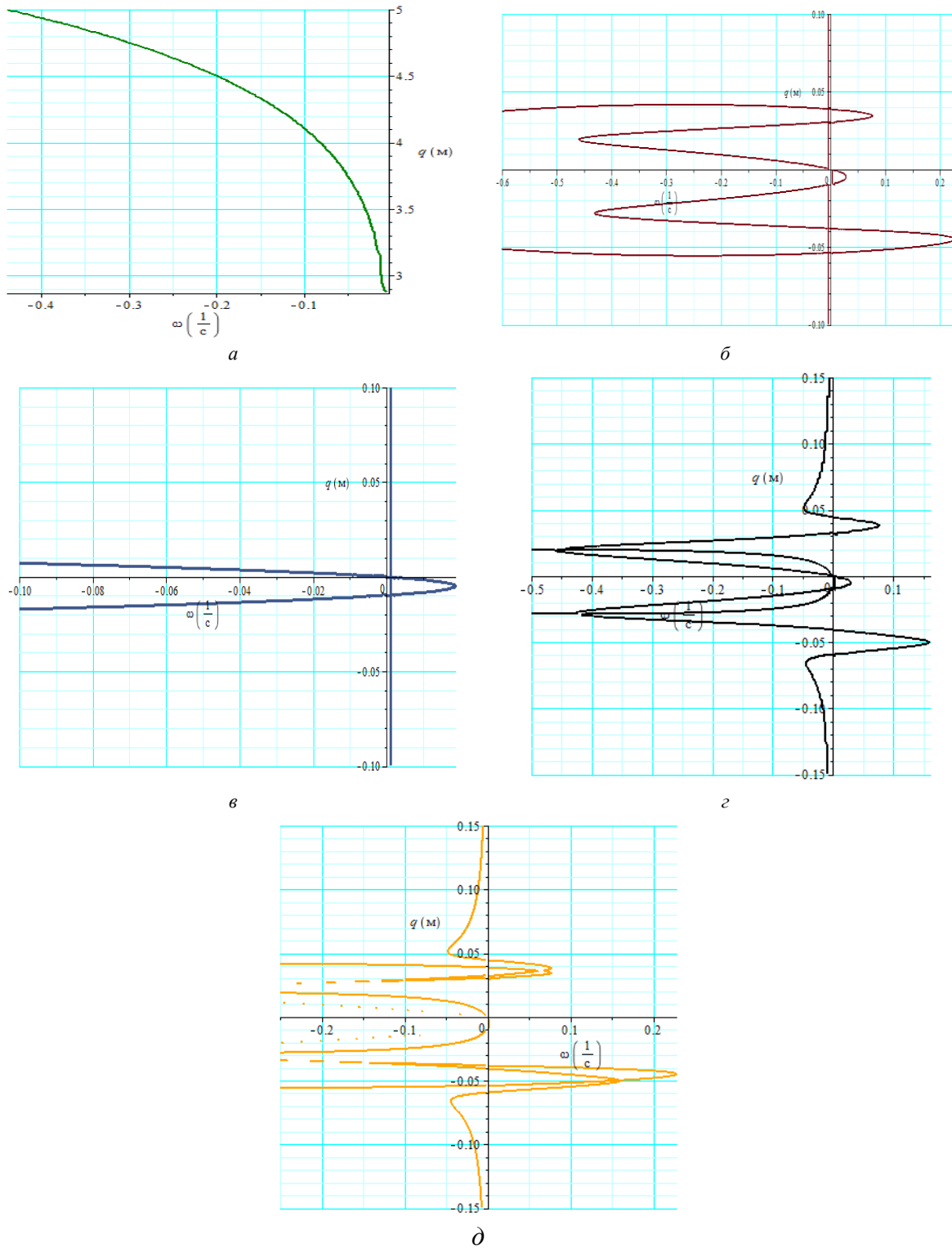


Рис. 2. Устойчивые и неустойчивые области по второму условию критерия Рауса

Из графика функции (12) на рис. 2, а видно, что в области аргументов, для которых эта функция имеет место, т.е в первой четверти, отсутствует неустойчивая область. Все

остальные рис. 2,б,в,г,д имеют неустойчивые области в первой четверти. Это означает, что вторые условия критерия Рауса (13)–(16) являются условиями устойчивости.

Заключение. Определены условия устойчивости по критерию Рауса при нелинейных поперечных колебаниях упругой пластины с жидкостным динамическим гасителем колебаний под действием кинематических возбуждений.

Разработана методика определения области устойчивости виброзащищаемой пластины по выбранным параметрам динамического гасителя колебаний с жидкостным звеном. В результате численного анализа на основе полученных условий устойчивости показаны параметры, соответствующие устойчивым и неустойчивым колебаниям виброзащищаемой пластины. Коэффициенты характеристического уравнения графически изображались при различных значениях параметров системы. Установлено, что они представляют собой четко обозначенные функции с положительными значениями.

На основе данной методики исследования устойчивости можно определить области и границы устойчивости виброзащищаемой пластины при различных значениях конструкционных параметров динамического гасителя колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Наумова Г.А., Саманов В.В., Пономаренко С.А.* Гидродинамический гаситель мостовых колебаний // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. 2012, Сер. 10, Иннов. деят., Вып. 7, С.93-98
- [2] *Mohamed F.Y.* Effect of different design parameters on damping capacity of liquid column vibration absorber // Journal of Engineering and Applied Science. 2018, Vol. 65(6), pp. 447-467.
- [3] *Alberto Di M., Mario Di P., Antonina P.* Innovative modeling of tuned liquid column damper controlled structures // Smart Structures and Systems. 2016, Vol. 18(1), 2016, pp. 117-138.
- [4] *Jans V., Līga G.* Overview of tuned liquid dampers and possible ways of oscillation damping properties improvement / Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference: Rezekne, Latvia, 2015, Vol.I. P.233-238.
- [5] *Espinoza G., Carrilloa C., Suazo A.* Analysis of a tuned liquid column damper in non-linear structures subjected to seismic excitations // Latin American Journal of Solids and Structures. 2018, Vol. 15(7), pp. 1-19.
- [6] *Hamidreza F., Mehdi Sh., Roozbeh P.* Application of tuned liquid column damper for motion reduction of semisubmersible platforms // International journal of coastal & offshore engineering. 2020, Vol. 4(2), pp. 23-40.
- [7] *Xiaohui Z., Yang Y., Liang Zh., Qingquan L., Han W.* A new energy-absorbing device for motion suppression in deep-sea floating platforms // Energies. 2015, No. 8, 2015, pp. 111-132. <http://dx.doi.org/10.3390/en8010111>
- [8] *Sarkar S., Fitzgerald B., Basu B., Chakraborty A.* Magneto-rheological tuned liquid column dampers to improve reliability of wind turbine towers // Lecture Notes in Mechanical Engineering part of Advances in Rotor Dynamics, Control, and Structural Health Monitoring. 2020, pp. 467-496. https://doi.org/10.1007/978-981-15-5693-7_34.
- [9] *Liang C., Yongqiang G., Filippo U., Hao W., An Ch., Simon L.* Development and validation of a nonlinear dynamic model for tuned liquid multiple columns dampers // Journal of Sound and Vibration. 2020, Vol.487.
- [10] *Phuoc T.N., Trung D.Ph.* The effectiveness of improved tuned liquid column damper on the dynamic response of the structure under earthquake excitations // International Journal of Advanced and Applied Sciences. 2019, Vol. 6(3), pp. 27-34
- [11] *Palazzo B., Castaldo P., Marino I.* The Dissipative Column: A New Hysteretic Damper // Journal of buildings. 2015, Vol. 5, P.163-178.
- [12] *Sayed M., Mousa A.A.* Vibration, Stability and Resonance of angle-ply composite laminated rectangular thin plate under multiexcitations / Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering. 2013, Vol. 2013, Article ID 418374, P.26 <http://dx.doi.org/10.1155/2013/418374>
- [13] *Павловский М.А., Рыжков Л.М., Яковенко В.Б., Дусматов О.М.* Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. – Киев. Техника, 1997. С. 204.
- [14] *Mirsaidov M.M., Dusmatov O.M., Khodjabekov M.U.* Stability of nonlinear vibrations of plate protected from vibrations // Journal of Physics: Conference Series. 2021, Vol.1921; URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1921/1/012097>
- [15] *Mirsaidov M.M., Dusmatov O.M., Khodjabekov M.U.* Mathematical modeling of hysteresis type elastic dissipative characteristic plate protected from vibration / AIP Conf. Proc., 2022 (2637), 060009-1–060009-7;
- [16] *Mirsaidov M.M., Dusmatov O.M., Khodjabekov M.U.* Mode shapes of hysteresis type elastic dissipative characteristic plate protected from vibrations // Lecture Notes in Civil Engineering. 2022, Vol.282, pp. 127-140.
- [17] *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. – Киев. Наукова думка, 1971, –327 с.
- [18] *Дусматов О.М.* Динамическое гашение упругих систем с сосредоточенными и распределенными параметрами: Дисс. На соискание канд. физ.-мат. наук. Киев, 1988. –183 с.
- [19] *Писаренко Г.С., Богинич О.Е.* Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. Киев. Наукова думка, 1981, – 219 с.

Дата поступления
20.02.2023

Ходжабеков М.У. Пластинканинг суюқликли динамик сўндиргич билан биргаликдаги чизиқсиз тебранишлари устуворлиги.

Аннотация: Ушбу ишда кинематик кўзгалишларда суюқлик бўғинли динамик сўндиргичга эга бўлган эластик пластинканинг чизиқсимас кўндаланг тебранишлари устуворлиги масаласи қаралган. Устуворликни текшириши учун Ляпуновнинг биринчи яқинлашиши усули қўлланилган ва Раус критерияси ёрдамида характеристик тенглама илдишларининг ҳақиқий қисми манфийлик шартлари аниқланган. Тебранишлардан ҳимояланувчи пластинканинг устуворлик шартлари аниқланган ва сонли таҳлил қилинган.

Калим сўзлар: тебранишлар; пластинка; динамик сўндиргич; суюқлик бўғин; гистерезис; характеристик тенглама; устуворлик.

Khodjabekov M.U. About the stability of nonlinear vibrations of the plate with liquid section dynamic absorber.

Abstract: In this work, the stability of nonlinear transverse vibrations of an elastic plate with a fluid section dynamic absorber in kinematic excitations is considered. The Lyapunov first approximation method was used to check the stability, and the conditions for the negativity of the real part of the roots of the characteristic equation were determined using the Routh criterion. The priority conditions of the anti-vibration plate were determined and numerically analyzed.

Keywords: vibrations; plate; dynamic absorber; liquid section; hysteresis; characteristic equation; stability.

УДК 532.546

ЗАДАЧА АНОМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

¹Усмонов А.И., ¹Кулжонов Ж.Б., ²Сулаймонов Ф.У.

¹Самаркандский государственный университет им. Шарафа Рашидова, Самарканд, Узбекистан.

²Джизакский государственный педагогический университет им. Абдуллы Кадыри, Джизак, Узбекистан.

E-mail: j.makhmudov@inbox.ru; a.usmonov.91@mail.ru; j.kuljanov86@gmail.com

Аннотация: В двухзонной области рассмотрена задача аномальной фильтрации неоднородной жидкости. Жидкость содержит взвешенные твердые частицы. Наряду с фильтрацией несущей фазы происходит перенос этих частиц в рассматриваемой среде. Считается, что среда имеет фрактальную структуру. Следовательно, аномальная фильтрация и перенос вещества описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными. Решена соответствующая задача и оценены различные характеристики фильтрации и переноса частиц. Определены относительный текущий, общий и суммарный расходы вещества – массоперенос через общую границу зон при различных значениях порядка производной по координате.

Ключевые слова: аномальный закон Дарси, дробная производная, перенос частиц, фильтрация, пористая среда.

Введение. Задачи переноса веществ и фильтрации неоднородных жидкостей имеют большое практическое значение во многих отраслях техники и технологии. Нефтяные и водоносные пласты могут содержать зоны с неподвижной или малоподвижной жидкостью, где фильтрация жидкости и перенос вещества происходит с проявлением ряда особенностей. Опубликовано много работ, где на основе экспериментальных исследований выявлены своеобразные эффекты [1–3].

В процессе фильтрации жидкости равновесная связь между скоростью фильтрации и градиентом давления может нарушаться. При фильтрации неоднородных жидкостей, содержащееся в жидкости вещество (или частицы) может задержаться в поровом пространстве, что приводит к изменению фильтрационно-ёмкостных характеристик пористой среды, в первую очередь ее проницаемости и пористости [1].

Ряд работ посвящен проблеме моделирования и переноса веществ в средах с фрактальной структурой, а также вопросам численного анализа уравнений с дробными производными [4–9]. Проблемам моделирования процессов загрязнения и геомиграции подземных вод посвящены работы [10–12]. Процессы переноса радона в средах с фрактальной структурой анализировались в работе [13].

Двухзонные среды очень часто встречаются в макроскопически неоднородных средах. В таких средах процессы фильтрации и переноса веществ протекают с проявлением внутреннего массообмена между различными зонами. Это существенно меняет общую картину фильтрации и переноса массы [14–18]. Уравнения переноса здесь в отличие от предыдущих имеют дробные производные. Следовательно, объект может быть рассмотрен как макроскопически неоднородная фрактальная среда.

Постановка и численное решение задачи. В данной задаче рассматривается среда, состоящая из двух зон, т.е. $R_1 \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq l\}$, $R_2 \{0 \leq x < \infty, l \leq y \leq \infty\}$ (Рис.1). Первоначально области R_1 и R_2 заполнены чистой жидкостью, без твердых частиц.

Процесс переноса твердых частиц в R_1 можно описать уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^{\beta_1} c}{\partial x^{\beta_1}} + D_2 \frac{\partial^{\beta_2} c}{\partial y^{\beta_2}} - \frac{\partial(v_x c)}{\partial x} - \frac{\partial(v_y c)}{\partial y}, \quad (1)$$

а в R_2 – уравнением диффузии в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^{\beta_3} c}{\partial y^{\beta_3}}, \quad (2)$$

где c – концентрация твердых частиц в жидкости, v_x, v_y – компоненты скорости фильтрации, D_1, D_2 – продольный и поперечный коэффициенты диффузии, D_3 – коэффициент эффективной диффузии, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – показатели производной, t – время.

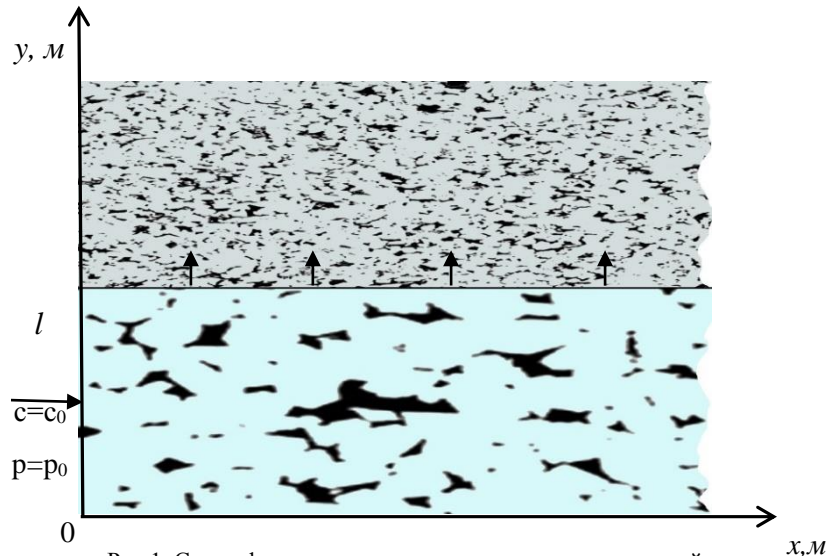


Рис.1. Схема фильтрации и переноса частиц в двухзонной среде

Компоненты скорости аномальной фильтрации в R_1 определяются как [19]

$$v_x = -\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial^{\gamma_1} p}{\partial x^{\gamma_1}}, \quad v_y = -\frac{k_2}{\mu} \frac{\partial^{\gamma_2} p}{\partial y^{\gamma_2}}, \quad (3)$$

где μ – коэффициент вязкости вещества, $k_1, k_2 = \text{const}$ – коэффициенты проницаемости, γ_1, γ_2 – показатели производной.

Уравнение неразрывности течения сжимаемой жидкости через пористую среду можно записать как [20]

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (4)$$

где m – коэффициент пористости, ρ – плотность жидкости.

Используем уравнения состояния упругой жидкости и упругой пористой среды [20]

$$\rho = \rho_0(1 + \beta_{жс}(p - p_0)), \quad m = m_0 + \beta_c(p - p_0), \quad (5)$$

где $\beta_{жс}$ – коэффициент объемного сжатия жидкости, β_c – коэффициент упругости среды, ρ_0 – первоначальная плотность жидкости, p_0 – первоначальное давление.

Подставив (3), (5) в (4), можно получить уравнение пьезопроводности с дробной производной

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi_1 \frac{\partial^{\gamma_1+1} p}{\partial x^{\gamma_1+1}} + \chi_2 \frac{\partial^{\gamma_2+1} p}{\partial y^{\gamma_2+1}}, \quad (6)$$

где $\chi_1 = \frac{k_1}{\mu\beta^*}$, $\chi_2 = \frac{k_2}{\mu\beta^*}$ – коэффициенты пьезопроводности, β^* – коэффициент упругости среды.

Начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$c(0, x, y) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty, \quad (7)$$

$$c(t, 0, y) = c_0, \quad c_0 = \text{const}, \quad y = l/2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(t, x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (9)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(t, 0, y) = 0, \quad y \neq l/2, \quad 0 \leq y \leq l, \quad (10)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(t, \infty, y) = 0, \quad 0 \leq y < \infty, \quad (11)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(t, x, y) = 0, \quad y = \infty, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (12)$$

$$p(0, x, y) = p_0, \quad p_0 = \text{const}, \quad (13)$$

$$p(t, 0, y) = p_c, \quad p_c > p_0, \quad p_c = \text{const}, \quad y = l/2, \quad (14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(t, x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(t, x, l) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t, 0, y) = 0, \quad y \neq l/2, \quad 0 \leq y \leq l, \quad (17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t, \infty, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l, \quad (18)$$

$$c|_{y=l-0} = c|_{y=l+0}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (19)$$

$$D_2 \frac{\partial^{\beta_2-1} c}{\partial y^{\beta_2-1}} \Big|_{y=l-0} = D_3 \frac{\partial^{\beta_3-1} c}{\partial y^{\beta_3-1}} \Big|_{y=l+0}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (20)$$

Задача (1), (2), (3), (6)–(20) решается методом конечных разностей. Для этого построим сетку в области $R_1 \cup R_2$, $\omega_{h_1 h_2 \tau} = \omega_{h_1 h_2 \tau}^1 \cup \omega_{h_1 h_2 \tau}^2$,

где $\omega_{h_1 h_2 \tau}^1 = \{(t_k, x_i, y_j) | t_k = \tau k, x_i = i h_1, y_j = j h_2, k = \overline{0, K}, i = \overline{0, 1, \dots, J}, j = \overline{0, 1, \dots, J}, \tau = T/K, h_2 = l/J\}$,

$\omega_{h_1 h_2 \tau}^2 = \{(t_k, x_i, y_j) | t_k = \tau k, x_i = i h_1, y_j = h_2 j, k = \overline{0, K}, i = \overline{0, 1, \dots, J}, j = \overline{J, J+1, \dots, J^1}, \tau = T/K\}$. В этой сетке: h_1 – шаг сетки по направлению x , h_2 – шаг сетки по направлению y в R_1 и R_2 , τ – шаг сетки по времени, T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс, K – количество интервалов сетки по t , J – количество интервалов сетки по y в R_1 , $(J^1 - J)$ – количество интервалов сетки по y в R_2 .

Вместо функций $c(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ и $p(t, x, y)$, мы будем рассматривать сетевые функции, значения которых в узлах (t_k, x_i, y_j) соответственно обозначим c_{ij}^k , v_{ij}^k и p_{ij}^k .

Рассмотрим случай $0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$, $1 < \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 2$.

На сетке $\omega_{h_1 h_2 \tau}^1$ аппроксимируем уравнение (1), а на $\omega_{h_1 h_2 \tau}^2$ – уравнение (2) следующим образом [21]

$$\begin{aligned} \frac{c_{ij}^{k+1} - c_{ij}^k}{\tau} &= \frac{D_1}{\Gamma(3 - \beta_1)h_1^{\beta_1}} \sum_{r=0}^{i-1} (c_{i-(r-1),j}^k - 2c_{i-r,j}^k + c_{i-(r+1),j}^k) \left((r+1)^{2-\beta_1} - r^{2-\beta_1} \right) + \\ &+ \frac{D_2}{\Gamma(3 - \beta_2)h_2^{\beta_2}} \sum_{r=0}^{j-1} (c_{i,j-(r-1)}^k - 2c_{i,j-r}^k + c_{i,j-(r+1)}^k) \left((r+1)^{2-\beta_2} - r^{2-\beta_2} \right) \\ &- \frac{(v_x)_{ij}^k c_{ij}^k - (v_x)_{i-1,j}^k c_{i-1,j}^k}{h_1} - \frac{(v_y)_{ij}^k c_{ij}^k - (v_y)_{i,j-1}^k c_{i,j-1}^k}{h_2}, \\ &i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{ij}^{k+1} - c_{ij}^k}{\tau} &= \frac{D_3}{\Gamma(3 - \beta_3)h_2^{\beta_3}} \sum_{r=0}^{i-1} (c_{i,j-(r-1)}^k - 2c_{i,j-r}^k + c_{i,j-(r+1)}^k) \left((r+1)^{2-\beta_3} - r^{2-\beta_3} \right), \\ &i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{J, J^1-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

Для компоненты скорости фильтрации используем следующие схемы

$$(v_x)_{ij}^{k+1} = -\frac{k_1 p_{i+1,j}^{k+1} - \gamma_1 p_{i,j}^{k+1}}{\mu \Gamma(2 - \gamma_1) h_1^{\gamma_1}}, \quad i = \overline{0, I-1}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (23)$$

$$(v_y)_{ij}^{k+1} = -\frac{k_2 p_{i,j+1}^{k+1} - \gamma_2 p_{i,j}^{k+1}}{\mu \Gamma(2 - \gamma_2) h_2^{\gamma_2}}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (24)$$

Уравнение (6) аппроксимируется как

$$\begin{aligned} \frac{p_{ij}^{k+1} - p_{ij}^k}{\tau} &= \frac{\chi_1}{\Gamma(3 - \gamma_1)h_1^{\gamma_1}} \sum_{r=0}^{i-1} (p_{i-(r-1),j}^k - 2p_{i-r,j}^k + p_{i-(r+1),j}^k) \left((r+1)^{2-\gamma_1} - r^{2-\gamma_1} \right) + \\ &+ \frac{\chi_2}{\Gamma(3 - \gamma_2)h_2^{\gamma_2}} \sum_{r=0}^{j-1} (p_{i,j-(r-1)}^k - 2p_{i,j-r}^k + p_{i,j-(r+1)}^k) \left((r+1)^{2-\gamma_2} - r^{2-\gamma_2} \right), \\ &i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad k = \overline{0, K-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Начальные и граничные условия аппроксимируются как

$$c_{i,j}^k = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, \quad (26)$$

$$c_{i,j}^k = c_0, \quad i = 0, \quad j = J/2, \quad k = \overline{0, K}, \quad (27)$$

$$\frac{c_{i,j+1}^k - c_{i,j}^k}{h_2} = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = 0, \quad k = \overline{0, K}, \quad (28)$$

$$\frac{c_{i+1,j}^k - c_{i,j}^k}{h_1} = 0, \quad i = 0, \quad j \neq J/2, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (29)$$

$$\frac{c_{i,j}^k - c_{i-1,j}^k}{h_1} = 0, \quad i = I, \quad j = \overline{0, J^1}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (30)$$

$$\frac{c_{i,j}^k - c_{i,j-1}^k}{h_2} = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = J^1, \quad k = \overline{0, K}, \quad (31)$$

$$p_{i,j}^k = p_0 = \text{const}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, \quad (32)$$

$$p_{i,j}^k = p_c, \quad i = 0, \quad j = J/2, \quad k = \overline{0, K}, \quad (33)$$

$$\frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{h_2} = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = 0, \quad k = \overline{0, K}, \quad (34)$$

$$\frac{p_{i,j}^k - p_{i,j-1}^k}{h_2} = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = J, \quad k = \overline{0, K}, \quad (35)$$

$$\frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{h_1} = 0, \quad i = 0, \quad j \neq J/2, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (36)$$

$$\frac{p_{i,j}^k - p_{i-1,j}^k}{h_1} = 0, \quad i = I, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (37)$$

$$c_{i,J-0}^k = c_{i,J+0}^k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (38)$$

$$D_2 \frac{c_{i,J}^k - (\beta_2 - 1)c_{i,J-1}^k}{\Gamma(2 - (\beta_2 - 1))h_2^{\alpha_2}} = D_3 \frac{c_{i,J+1}^k - (\beta_3 - 1)c_{i,J}^k}{\Gamma(2 - (\beta_3 - 1))h_2^{\alpha_3}}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (39)$$

где I – достаточно большое число, для которого приблизительно выполняется условия $c_{1,j}^k = 0$.

Вводим следующие обозначения

$$E_1^k = \frac{(v_x)_{ij}^k c_{ij}^k - (v_x)_{i-1,j}^k c_{i-1,j}^k}{h_1}, \quad E_2^k = \frac{(v_y)_{ij}^k c_{ij}^k - (v_y)_{i,j-1}^k c_{i,j-1}^k}{h_2}, \quad G_1 = \frac{\tau D_1}{\Gamma(3 - \beta_1)h_1^{\beta_1}},$$

$$G_2 = \frac{\tau D_2}{\Gamma(3 - \beta_2)h_2^{\beta_2}}, \quad S_1^k = \sum_{r=0}^{i-1} (c_{i-(r-1),j}^k - 2c_{i-r,j}^k + c_{i-(r+1),j}^k) \left((r+1)^{2-\beta_1} - r^{2-\beta_1} \right),$$

$$S_2^k = \sum_{r=0}^{j-1} (c_{i,j-(r-1)}^k - 2c_{i,j-r}^k + c_{i,j-(r+1)}^k) \left((r+1)^{2-\beta_2} - r^{2-\beta_2} \right).$$

С учетом этих обозначений, уравнение (21) имеет вид

$$c_{ij}^{k+1} = c_{ij}^k + G_1 S_1 + G_2 S_2 - \tau (E_1^k + E_2^k). \quad (40)$$

Последовательность расчетов следующая: сначала определяется p из разностной схемы (25) на $(k+1)$ – слое, затем из (23), (24) вычисляются компоненты скорости фильтрации, после этого c определяются на $(k+1)$ – слое из разностных уравнений (40) и (22).

В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $k_1 = 3 \cdot 10^{-13} \text{ м}^{1+\gamma_1}$, $k_2 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^{1+\gamma_2}$, $\mu = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\beta^* = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$, $p_c = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $c_0 = 0,01$, $D_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{\beta_1} / \text{с}$, $D_2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{\beta_2} / \text{с}$ и $D_3 = 10^{-5} \text{ м}^{\beta_3} / \text{с}$. Некоторые результаты представлены на рис. 2 – 4. На рис. 2 показаны поверхности концентрации при разных значениях времени. Наблюдалось увеличение профилей концентрации со временем. Уменьшение значений γ_1 и γ_2 от 1 приводит к увеличению распространения концентрации взвешенных частиц (рис.3).

На рис.4 приведены поверхности концентрации при уменьшении значений β_3 2. Сравнение результатов показывает, что уменьшение β_3 от 2 ускоряет диффузионный процесс в зоне R_2 . При этом, с уменьшением β_3 от 2 в зоне R_1 можно заметить уменьшение значений концентрации.

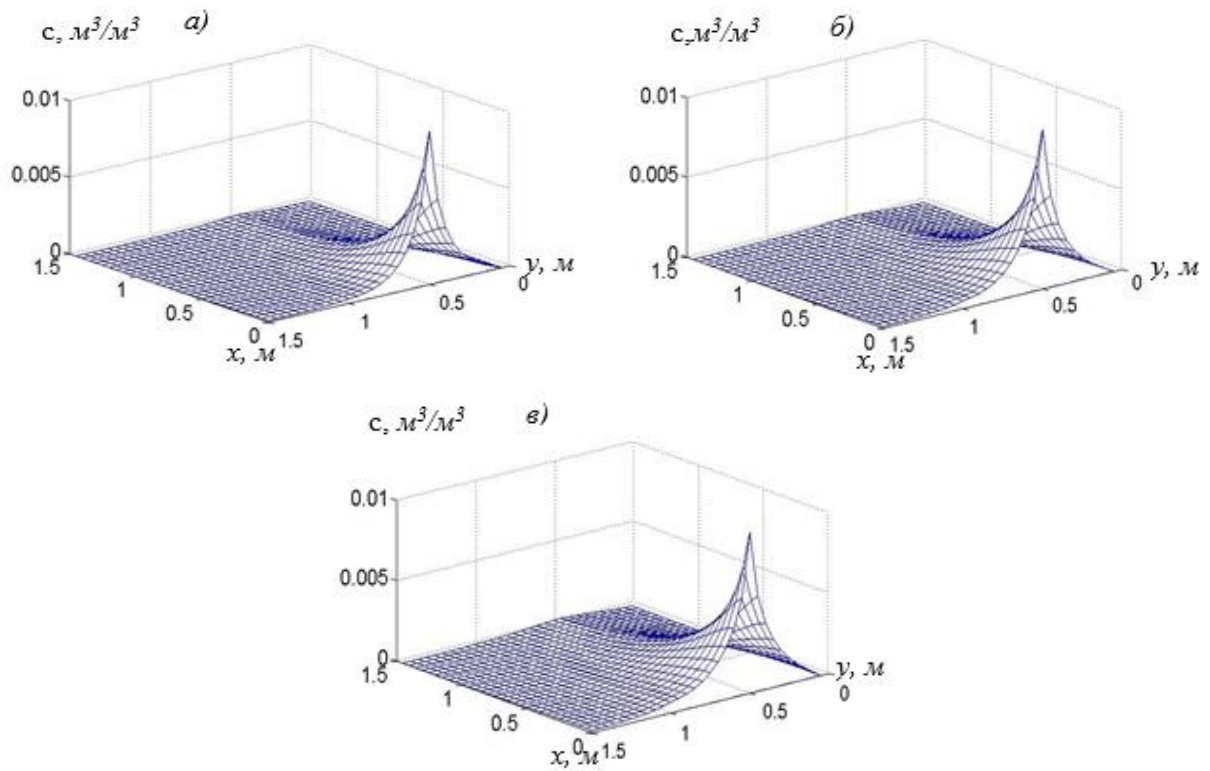


Рис.2. Поверхности c при $\gamma_1 = 0.9$; $\gamma_2 = 0.9$; $\beta_1 = 1.8$, $\beta_2 = 1.$; $\beta_3 = 1.6$; $t = 5000$ c (a), $t = 7500$ c (б), $t = 10000$ c (в)

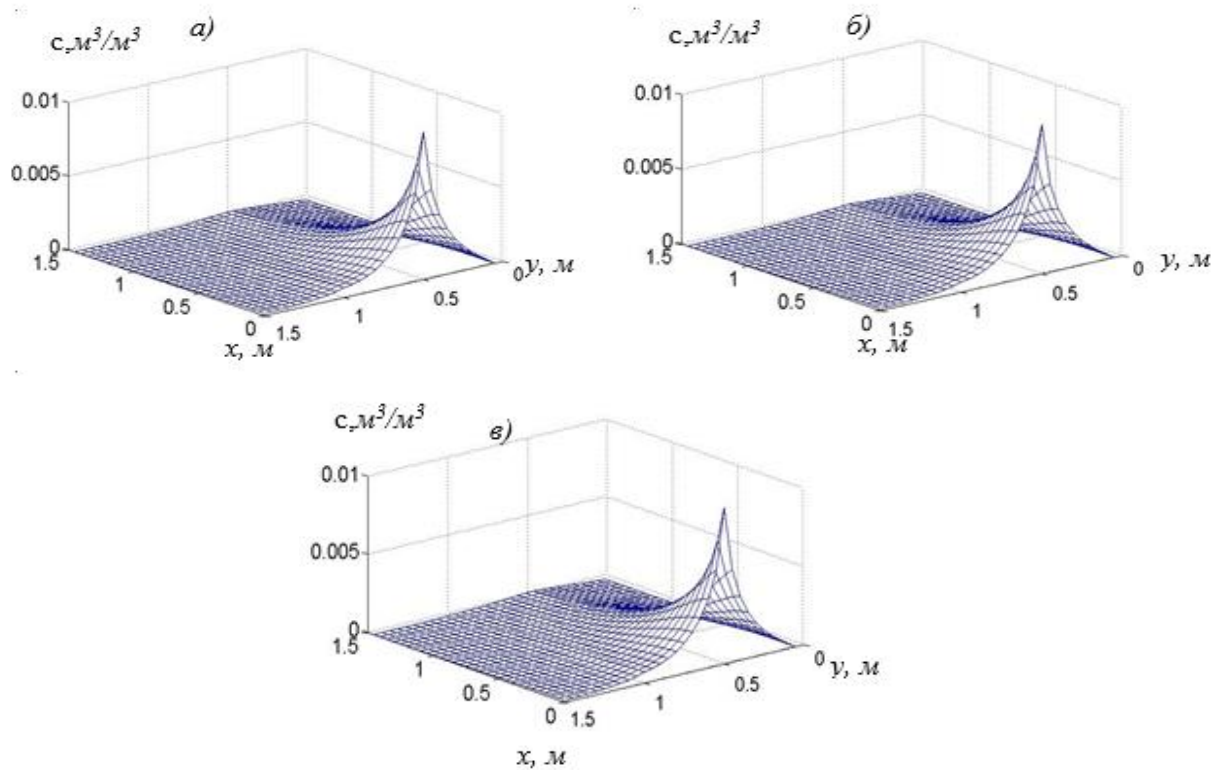


Рис. 3. Поверхности c при $\beta_3 = 1.6$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 2$; $t = 10000$ c; $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ (a), $\gamma_1 = 0.9$, $\gamma_2 = 0.9$ (б), $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.8$ (в).

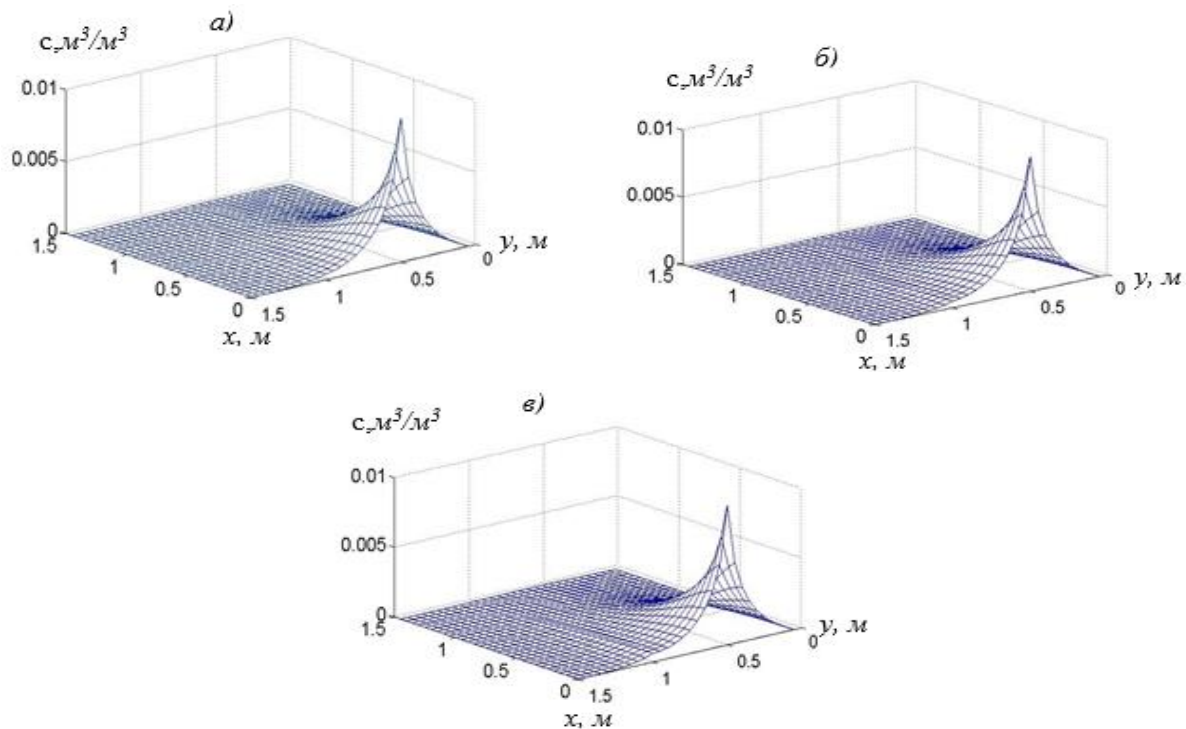


Рис.4. Поверхности c при $\gamma_1 = 0.9$, $\gamma_2 = 0.9$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 2$; $t = 10000$ с; $\beta_3 = 2$ (а), $\beta_3 = 1.8$ (б), $\beta_3 = 1.6$ (в).

В процессе расчетов определен текущий относительный расход вещества через $y=0$ как

$$Q = D_3 \frac{\partial^{\beta_3-1} c}{\partial y^{\beta_3-1}},$$

в заданных точках x в различные моменты времени. Некоторые результаты показаны на рис.5–6. Относительный текущий расход вещества – массоперенос через общую границу R_1 и R_2 в точке $x=0$ относительно высок и монотонно убывает (рис.5,а). Высокие значения Q здесь объясняются большими градиентами концентрации на $y=0$ в начальные моменты времени. С развитием процесса градиент концентрации уменьшается, что приводит к уменьшению Q . Это также объясняется динамикой градиента концентрации на общей границе $y=0$. Кроме того, с уменьшением γ_1, γ_2 обнаруживается ослабление динамики Q , что на первый взгляд является противоречивым результатом. Как уже отмечалось выше, уменьшение β_3 приводит к быстрой диффузии в R_2 , что означает относительно больший переход вещества из R_1 в R_2 . Значения же Q определяются локальной характеристикой – градиентом концентрации на $y=0$ и D_3 рис.6а. Поэтому, за счет уменьшения градиента концентрации на общей границе R_1 и R_2 отмечается уменьшение Q при уменьшении значений β_3 .

На рис.5–6(б) приведены графики общего относительного $Q_{общ} = \int_0^{\infty} Q dx$, а на рис.5–

6,в суммарного относительного $Q_{сум} = \int_0^t Q_{общ} dx$ расхода вещества через общую границу областей R_1 и R_2 для значений параметров γ_1 и γ_2 . Уменьшение β_3 приводит к быстрой диффузии в R_2 , что означает относительно больший переход твердых частиц из R_1 в R_2 . Значения же $Q_{общ}$ и $Q_{сум}$ определяются локальной характеристикой – градиентом концентрации на $y=0$ и D_3 (рис.6 (б,в)). Поэтому, за счет уменьшения градиента концентрации на общей границе R_1 и R_2 отмечается уменьшение $Q_{общ}$ и $Q_{сум}$ при уменьшении значений β_3 .

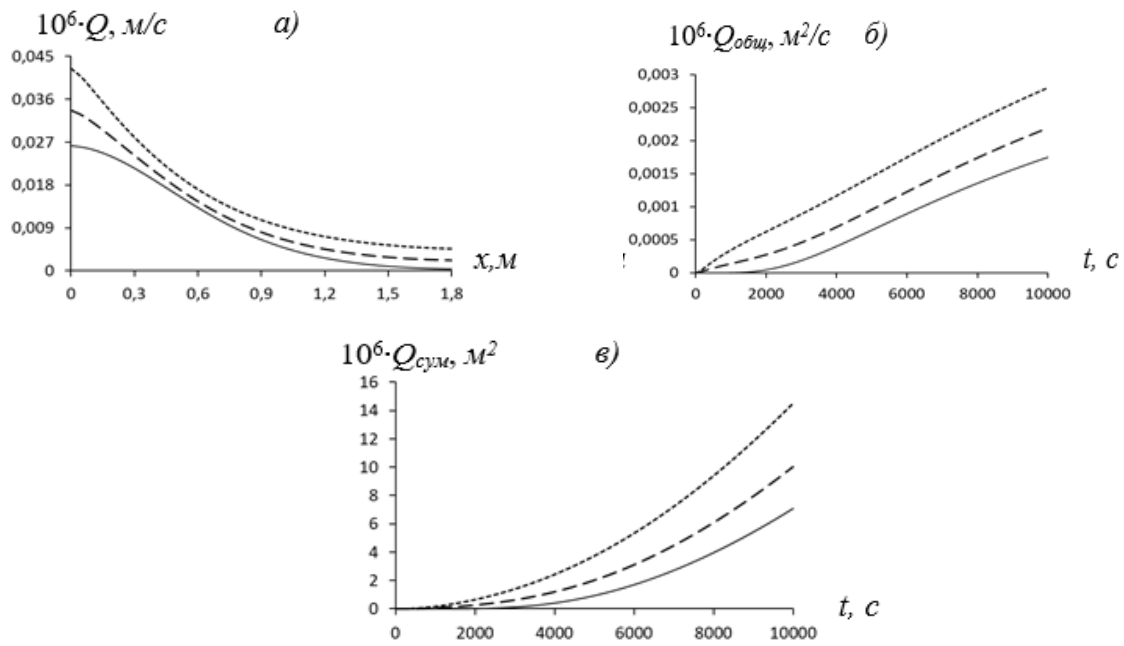


Рис.5. Изменение $Q(a)$, $Q_{\text{общ}}(б)$, $Q_{\text{сум}}(в)$ при; $t = 10000 \text{ с}$, $\beta_3 = 1,6$, $\beta_1 = 1,8$, $\beta_2 = 1,8$;
 — $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$, — — $\gamma_1 = 0,9, \gamma_2 = 0,9$, - - - $\gamma_1 = 0,8, \gamma_2 = 0,8$.

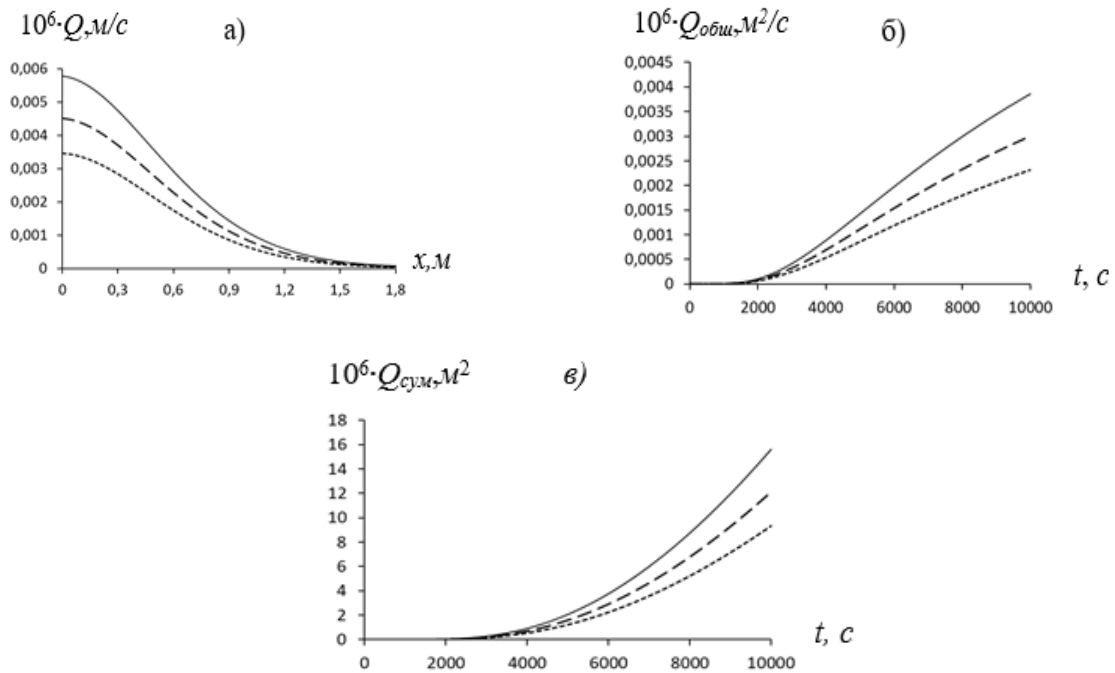


Рис.6. Изменение $Q(a)$, $Q_{\text{общ}}(б)$, $Q_{\text{сум}}(в)$ при $t = 10000 \text{ с}$, $\gamma_1 = 0,8, \gamma_2 = 0,8$; $\beta_1 = 2, \beta_2 = 2$;
 — $\beta_3 = 2$, — — $\beta_3 = 1,8$, - - - $\beta_3 = 1,6$.

Заключение. Результаты расчетов показывают, что уменьшение показателя производной в соотношении скорости аномальной фильтрации от 1 приводит к более широкому распространению поле концентрации. Уменьшение показателя производной в диффузионном члене от 2 приводит к “ускорению” диффузионного процесса. Определен текущий относительный расход вещества через общую границу зон Q . Показано, что уменьшение показателя производной β_1 и β_2 от 2, а также γ_1 и γ_2 от 1 приводит к увеличению общего и

суммарного относительного расхода через границу зон. Уменьшение же порядка производной β_3 от 2 приводит к уменьшению общего и суммарного относительного расходов через общую границу зон.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rao P.S.C., Rolston D.E., Jessup R. E., Davidson J.M. Solute transport in aggregated porous media: Theoretical and experimental evaluation // Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 44. 1980b. P. 1139 – 1146.
- [2] Sudicky E.A., Frind E.O. Contaminant transport in fractured porous media: Analytical solutions for a system of parallel fractures // Water Resour. Res. 18(6). 1982. P.1634-1642.
- [3] Rao P.S.C., Jessup R.E., Addison T.M. Experimental and theoretical aspects of solute diffusion in spherical and non-spherical aggregates // Soil Sci. Soc. Am. J., 133. 1982. P. 342-349.
- [4] Баззаев А.К. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах с граничными условиями первого рода // Владикавказский математический журнал. 2014. Т. 16. №2. С. 3–13.
- [5] Баззаев А.К., Цопанов И.Д. Локально-одномерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах // Сибирские электронные математические известия. 2015, Т. 12, С. 80–91.
- [6] Баззаев А.К., Шхануков-Лафшиев М.Х. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010, Т. 50, № 7, С.1200–1208.
- [7] Бейбалаев В.Д. Математическая модель теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Математическое моделирование. 2009, Т. 21, № 5, С. 55–62.
- [8] Бейбалаев В.Д., Якубов А.З. Анализ разностной схемы аналога волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2014, выпуск 1(34), С. 125–133.
- [9] Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р. Численный метод решения начально-граничной задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2010, выпуск 5(21), С. 244–251.
- [10] Афонин А.А. Линейные двумерные модели геофильтрации в пористых средах с фрактальной структурой // Известия ЮФУ. Технические науки. Раздел II. Математическое моделирование экосистем. С.150-154.
- [11] Булавацкий В.М. Дробно-дифференциальные математические модели динамики неравновесных геомиграционных процессов и задачи с нелокальными граничными условиями // Доповіді Національної академії наук України. Інформатика та кібернетика. 2012, №12, С.31-40.
- [12] Сербина Л.И., Вендина А. А. Асимптотический метод решения дробного уравнения миграции загрязнения подземных вод // Вестник Самарского государственного технического университета. Естественно-научная серия. 2011, выпуск 5(86), С. 104–108.
- [13] Сербина Л.И., Вендина А.А. Асимптотический метод решения дробного уравнения миграции загрязнения подземных вод // Вестник Самарского государственного технического университета. Естественно-научная серия. 2011, выпуск 5(86), С. 104–108.
- [14] Khuzhayorov B.Kh., Makhmudov J.M. Flow of suspension in two-dimensional porous media with mobile and immobile liquid zones // Journal of Porous Media, 2010. Vol. 13, No 5. P. 423-437.
- [15] Хужаёров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. Ташкент: ФАН, 2012, – 280 с.
- [16] Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Кольматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостями // Инженерно-физический журнал. 2007, Т.80, №1, С. 46-53.
- [17] Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Математические модели фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах. Ташкент: ФАН, 2014. – 280 с.
- [18] Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Жаманкулова Ф.Э. Фильтрация суспензии в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью // Проблемы механики. 2013, № 2. С. 44-47.
- [19] Белевцов Н.С. Об одной дробно-дифференциальной модификации модели нелетучей нефти // Математика и математическое моделирование. 2020, № 06. С. 13-27.
- [20] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. – 288 с.
- [21] Бейбалаев В.Д., Якубов А.З. Анализ разностной схемы аналога волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2014, выпуск 1(34), С. 125–133.

Дата поступления
25.10.2022

Усмонов А.И., Кулжанов Ж.Б., Сулаймонов Ф.Ў. Икки ўлчамли соҳада биржинслимас суюқликнинг аномал сизиши масаласи

Аннотация: Икки ўлчамли муҳитда биржинслимас суюқликнинг аномал сизиши масаласи қаралган. Суюқликда муаллақ қаттиқ заррачалар мавжуд. Қаралаётган соҳада тащувчи фаза сизиши билан биргалликда қаттиқ заррачалар кўчиши ҳам юз беради. Муҳит фрактал тузилишига ега деб фараз қилинади. Бинобарин, аномал сизиши ва модданинг кўчиши каср ҳосилали дифференциал тенгламалар билан тавсифланади. Қўйилган масала йечилиб, заррачалар кўчиши ва сизишининг турли характеристикалари баҳоланган. Зоналарнинг умумий чегараси орқали модданинг жорий, умумий ва жамланма нисбий оқими координатага нисбатан ҳосила тартибининг турли қийматлари учун аниқланган.

Калит сўзлар: Дарси аномал қонуни, касрли ҳосила, зарралар кўчиши, фильтрация, говакли муҳит.

Usmonov A.I., Kuljanov J.B., Sulaymanov F.U. The problem of anomalous filtration of nonhomogeneous fluid in a two-dimensional medium

Abstract: *The problem of anomalous filtration of nonhomogeneous liquid in a two-dimensional medium is considered. The fluid contains suspended solid particles. Along with the filtration of the carrier phase there is a transport of these particles in the considered medium. The medium is considered to have a fractal structure. Consequently, anomalous filtration and solute transport is described by differential equations with fractional derivatives. The corresponding problem is solved and various characteristics of filtration and solute transport are evaluated. Relative current, total and total substance - mass transfer through the common zone boundary at different values of the order of the coordinate derivative are determined.*

Keywords: *anomalous Darcy's law; fractional derivative; particle transfer; filtration; porous medium.*

УДК 539.37:624.131.551

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГРУНТЕ

¹Набиев А.Н., ²Набиев А.А.

¹Ташкентский химико-технологический институт, г.Ташкент, ул.Навои, 32, Узбекистан

²Ташкентский государственный технический университет им. И.Каримова, г.Ташкент, ул. Университет, 2, Узбекистан
E-mail: a68609129@gmail.com

Аннотация. *С учетом совместных действий нормальных и касательных напряжений выведены уравнения одномерного динамического движения грунта, согласно которому исследуются закономерности распространения ударных волн в грунтовых массивах при взрыве с цилиндрической симметрией. Применено условие пластичности Мизеса-Шлейхера-Боткина в случае пространственного движения связанных грунтов, также при моделировании грунта как упругопластической среды использованы результаты экспериментальных исследований по определению механических свойств грунтов при высоких напряжениях в виде $\sigma(\varepsilon)$ и $\sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)$, полученное автором.*

Ключевые слова: *однородность; смещение и плотность грунта; взрыв; нормальные и касательные напряжения; моделирование грунта; ударная волна.*

На более всесторонний и правильный анализ напряженно-деформированного состояния инженерных сооружений, дорог, дамб, плотин, защитной среды и т.д. существенно влияют моделирование грунтовых массивов, с которыми непосредственно взаимодействуют сооружения.

Установлено, что в зависимости от методики исследования проблем и от характера и величины внешних воздействий один и тот же грунт допускает моделирование, согласующийся с экспериментальными исследованиями основных механических свойств при высоких статических и динамических напряжениях, в различных вариациях. В связи с этим предложено множество моделей грунтовых сред [1 – 5].

Академиком Х.А.Рахматулиным впервые введена модель грунта при высоких напряжениях и больших скоростях деформаций, как гипотетическая сплошная среда, обладающая свойством идеального «пластического газа». Пластическим газом называется сплошная среда, которая при нагружении изменяет свою плотность по определенному закону, но при разгрузке сохраняет полученную при нагружении плотность. Повторное нагружение не изменяет плотности, пока напряжение или давление не достигнет первоначального максимального значения.

В предлагаемой статье излагается исследование закономерности распространения цилиндрических волн в упругопластической среде на основе деформационной теории пластичности в одномерной постановке. Здесь в качестве упругопластической среды рассматривается однородный грунт, занимающий все пространство, т.е. без учета граничных поверхностей.

Механическая постановка задачи заключается в том, что при взрыве в грунте бесконечного цилиндрического заряда с радиусом поперечного кругового сечения r_0 мгновенно, без изменения объема, заряд превращается в газ высокого давления, который в дальнейшем расширяется по политропической закономерности с известным показателем политропы γ .

Подход к проблеме с механико-математической точки зрения с учетом совместного влияния нормальных и касательных напряжений, учитывая их инвариантность выведено уравнение одномерного динамического движения грунта в переменных Лагранжа в более обобщенном виде [6]:

$$\rho_0 r^k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r+u)^k \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_\varphi) \frac{\partial}{\partial r} (r+u)^k + \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r+u)^k \quad (1)$$

где, третье слагаемое учитывает наличие касательных напряжений в наклонных площадках и согласно кругу Мора имеет вид:

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{2} \sin 2(d\varphi) \quad (a)$$

При этом соответственно уравнение неразрывности грунта в переменных Лагранжа и условия пластичности Мизеса-Шлейхера-Боткина в случае пространственного движения связанных грунтов, применение которого предложено С.С.Григоряном [7], имеют вид:

$$\frac{1}{k+1} \frac{\partial}{\partial r} (r+u)^{k+1} = \frac{\rho_0}{\rho} r^k \quad (2)$$

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = -\frac{\tau_0}{1+2\mu} + \frac{3\mu}{1+2\mu} \sigma_r \quad (3)$$

где, $k = 2, 1, 0$ – постоянные, соответствующие для случаев сферического, цилиндрического и плоского одномерного волнового движения.

Коэффициенты τ_0 и μ связаны с предельным сопротивлением всестороннему чистому «растяжению» H_0 и углом ψ внутреннего трения грунта на октаэдрической площадке соотношениями

$$\tau_0 = \sqrt{3} H_0 \operatorname{tg} \psi, \quad \mu = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{3}} \quad (б)$$

Как правило, $H_0 \operatorname{tg} \psi$ называется сопротивлению чистому сдвигу и устанавливается из эксперимента.

В частном случае, когда касательные составляющие напряжений не будут действовать по граням элемента, выделенного из движущейся среды – грунта, занимающем все пространство при взрыве взрывчатого вещества, получим аналогичное уравнение динамического движения, выведенное академиком Х.А.Рахматулиным.

Система уравнений (1), (2), (3) содержит следующие четыре неизвестные функции: главные напряжения σ_r и σ_φ ; смещение u и плотность ρ и, следовательно, является незамкнутой.

Для замыкания системы уравнений необходимо в качестве дополнительной связи зависимость между $\sigma(\varepsilon)$ и $\sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)$ при высоких статических или динамических напряжениях и больших скоростях деформации, для случая нагрузки и разгрузки грунтов или горных пород.

При моделировании грунта как упругопластической среды использованы результаты экспериментальных исследований по определению механических свойств грунтов при высоких напряжениях в виде $\sigma(\varepsilon)$ и $\sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)$, полученное автором [4, 5]; при разгрузке грунта зависимость $\sigma(\varepsilon)$ заменяется или условием $\rho = \text{const}$, или же зависимостью

$$\sigma(\varepsilon) = \phi(\varepsilon, \varepsilon_{\max})$$

где, ε_{\max} – максимальная объемная деформация частицы грунтовых массивов, достигнутая в процессе нагружения при высоких статических или динамических напряжениях.

Следует отметить, что пространство делится движущейся поверхностью на две области: активную и пассивную. Производные функции $\sigma(\varepsilon)$ и $\phi(\varepsilon, \varepsilon_{\max})$ в точке $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ терпят разрыв, указанная движущейся поверхность, является волной Рахматулина и для случая разгрузки решение уравнения движения будут существенно более сложными, чем для нагрузки, так как в них войдет неизвестный параметр ε_{\max} .

Основные механические свойства грунта и горных пород представлены в виде следующих инвариантных соотношений:

а) зависимость между средним нормальным напряжением и объёмной деформацией сжатия является физически нелинейной функцией, которая как результаты опытов аппроксимируется, например, в виде

$$F(\varepsilon) = k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon^2 + k_3 \varepsilon^3$$

б) зависимость между интенсивностью напряжений

$$\frac{\sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)}{H_0 + F(\varepsilon)}$$

и интенсивности деформаций сдвига ε_i , которые аппроксимируется в качестве результата опыта дробно-линейной (гиперболической) функцией в виде

$$\frac{\sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)}{H_0 + F(\varepsilon)} = \frac{G_0 \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi + G_0 \varepsilon_i} \varepsilon_i$$

что соответствует гипотезе о существовании упругого потенциала $U(\varepsilon, \varepsilon_i)$. Где, $k_1, k_2, k_3, H_0, \operatorname{tg} \psi, G_0$ - опытные константы, полученные автором [6].

Тогда обобщенные модули G и λ определяются формулами:

$$\lambda = \frac{1}{3} \sigma(\varepsilon) - \frac{2}{9 \varepsilon_i} \sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i), \quad G = \frac{1}{3 \varepsilon_i} \sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i) \quad (B)$$

Вследствие малости угла $d\psi$ и $d\varphi$ однородности и симметричности грунтового массива, с помощью (3) после некоторых преобразований уравнение динамического движения грунта, в случае взрыва с цилиндрической симметрией

$$\rho_0 r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r+u) \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi) \frac{\partial}{\partial r} (r+u) \quad (4)$$

Согласно гипотезе идеального пластического газа можно считать, что в области движения грунта за ударной волной плотность есть функция координаты Лагранжа r (расстояния частицы от начала координат в состоянии покоя) и не зависит от времени t .

В силу симметрии задачи ограничимся исследованием распространения волны вправо. При этом имеем следующие начальные и граничные условия:

$$r > r_0, \quad t = 0, \quad u_r = u_t = 0, \quad r = r_0, \quad t > 0, \quad -\sigma_r = p_f(t) \quad (4a)$$

где, $p_f(t)$ – заданная функция времени.

Интегрируя уравнение (4) по координате r и учитывая граничное условие, на фронте ударной волны имеем:

$$(r+u)^\nu \sigma_r - r^{*\nu} \sigma_r^* = -\rho_0 \int_{r_0}^{r^*} (r+u)^{\nu-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} r dr - \frac{2\tau_0}{\nu(1+2\mu)} (r^{*\nu} - (r+u)^\nu) \quad (5)$$

где, $\nu = \frac{6\mu}{1+2\mu}$ – постоянное число.

Скорость и ускорение частиц грунтового массива определяется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{R \dot{R}}{\sqrt{2\psi(r) + R^2(t)}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\dot{R}^2 + R \ddot{R}}{\sqrt{2\psi(r) + R^2(t)}} - \frac{(R \dot{R})^2}{(2\psi(r) + R^2(t))^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

Теперь запишем основные соотношения на фронте ударной волны, вытекающие из законов сохранения масс и количества движения:

$$u_t^* + Du_r^* = u_t^{**} + Du_r^{**} \quad (7)$$

$$\rho^* Du_t^* (1+u_r^*) + \sigma_{r(\varepsilon)}^* = \rho^{**} Du_t^{**} (1+u_r^{**}) + \sigma_{r(n)}^{**} \quad (8)$$

где, $\sigma_{r(\varepsilon)}^* = \overline{\sigma_r^*} + \overline{\sigma_r^*}$ – напряжение, соответствующее на возмущенную часть среды;

$\overline{\sigma_r^*} = \sigma_r^*$ – напряжение на фронте ударной волны;

$\overline{\overline{\sigma_r^*}} = \lambda(\varepsilon^*, \varepsilon_i^*)\varepsilon_r^* + 2G(\varepsilon^*, \varepsilon_i^*)\varepsilon_r^*$ – напряжение, соответствующее на «возмущенную часть» среды, так как в области «возмущения» грунт находится в напряженном состоянии.

$\sigma_{r(n)}^{**} = \overline{\sigma_r^{**}} + \overline{\overline{\sigma_r^{**}}}$ – напряжение, соответствующее на не возмущенную часть среды;

$\overline{\overline{\sigma_r^{**}}} = -p_\alpha$ напряжение, равное атмосферной давлению, $\overline{\sigma_r^{**}} = 0$ так как, в области «покоя» грунт находится в естественном состоянии.

Тогда основные соотношения на ударной волне примут вид:

$$b(r^*) = \frac{\rho_0}{\rho(r^*)}, \quad D = \frac{u_t^*}{1-b(r^*)}, \quad R(t) = \sqrt{r^{*2} - 2 \int_{r_0}^{r^*} \frac{\rho_0}{\rho(r^*)} r dr} \quad (9)$$

где, $\rho(r^*)$ – плотность среды, r^* – координаты ударной волны, D – скорость ударной волны, u_t^* – скорость частицы на ударной волне, $R(t)$ – радиус каверны в произвольный момент времени.

В работе [3] представлено, что напряжение в грунте перед ударной волной представляется в виде гидростатического давления с определённой интенсивностью, как например p_α .

Ссылаясь на то, что, в данной статье предполагается, что в зоне среды, непосредственно прилегающей к ударной волне, возникает «сильное» напряженное состояние при взрыве, т.к. даже отсутствие смещения частиц в невозбужденной среде может вызвать определенное напряжение, или, что тоже самое, давление.

Поэтому есть полное основание, при определении напряжения перед ударной волной, пользоваться результатами имеющихся экспериментальных исследований.

На основании доказательств, изложенных в данной работе, впервые предлагается, что напряжение впереди ударной волны в общем случае определяется как некоторая функция, имеющая зависимость от ε^* и ε_i^* [8]:

$$-\sigma_r^* = \frac{\rho_0}{1-b(r^*)} \frac{(R \dot{R})^2}{r^{*2}} + \left[\frac{\sigma(\varepsilon^*)}{\varepsilon^*} + \frac{4}{9} \frac{\sigma_i(\varepsilon^*, \varepsilon_i^*)}{\varepsilon_i^*} \right] \varepsilon_r^* + p_\alpha \quad (10)$$

и направлено против координатной оси r .

Вследствие малости угла $d\psi$ и $d\varphi$ однородности и симметричности грунтового массива, а также учитывая уравнения неразрывности, динамических условий на ударной волне, гипотезы о существовании упругого потенциала, постоянности плотности за ударной волной

$$\frac{\rho_0}{\rho(r)} = \frac{\rho_0}{\rho_1} = 1 - \varepsilon = b_1 = const$$

после некоторых преобразований уравнение движения грунта в точке $r=r_0$ имеет следующий вид и обладает инвариантными свойствами:

$$-\sigma_r(r_0, t) R^\nu = \left(R \ddot{R} + \dot{R}^2 \right) \frac{\rho_0}{\nu b_1} \left\{ \left[b_1 (r^{*2} - r_0^2) + R^2 \right]^{\frac{\nu}{2}} - R^\nu \right\} - \frac{\rho_0}{(\nu - 2) b_1} \cdot \left(R \dot{R} \right)^2 \left\{ \left[b_1 (r^{*2} - r_0^2) + R^2 \right]^{\frac{\nu}{2} - 1} - R^{\nu - 2} \right\} + \frac{2\tau_0}{\nu(1 + 2\mu)} (r^{*\nu} - R^\nu) - r^{*\nu} \sigma_r^* \quad (11)$$

Предположим, что газ, образовавшийся в результате взрыва заряда, расширяется по политропическому закономерности, т.е. после взрыва образуется расширяющаяся цилиндрическая каверна, заполненная газом – продуктом взрыва:

$$-\sigma_r(r_0, t) = p_0 \left(\frac{r_0}{R} \right)^{2\gamma} \quad (12)$$

где, p_0 – давление газа в момент мгновенного взрыва, γ – показатель политропы.

Подстановкой

$$y = \dot{R}^2, \quad y' = \frac{dy}{dR} = 2\ddot{R} \quad (13)$$

(11) приводится к уравнению первого порядка относительно y по аргументу R :

$$y' + F(R)y = Q(R) \quad (14)$$

решение которого дается выражением

$$y = e^{-\int_{r_0}^R F(R) dR} \left\{ y_0 + \int_{r_0}^R Q(R) e^{\int_{r_0}^R F(R) dR} dR \right\}$$

где,

$$F(R) = 2 \left\{ \left[(m(R))^{\frac{\nu}{2}} - 1 \right] - \frac{\nu}{\nu - 2} \left[(m(R))^{\frac{\nu}{2}} - 1 \right] + \frac{\nu b_1}{1 - b_1} (m(R))^{\frac{\nu}{2} - 1} \right\} \cdot \left\{ R(m(R))^{\frac{\nu}{2}} - 1 \right\}^{-1}, \quad m(R) = \frac{R^2 - b_1 r_0^2}{(1 - b_1) R^2}$$

$$Q(R) = \left\{ \frac{2\nu b_1}{\rho_0} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{2\gamma} p_0 - \frac{2\nu b_1}{\rho_0} (m(R))^{\frac{\nu}{2}} p_\alpha - \frac{4\tau_0 b_1}{\rho_0(1 + 2\mu)} \left[(m(R))^{\frac{\nu}{2}} - 1 \right] + \frac{2\nu b_1}{\rho_0} (m(R))^{\frac{\nu}{2}} \left[\frac{\sigma(\varepsilon^*)}{\varepsilon^*} + \frac{4}{9} \frac{\sigma_i(\varepsilon^*, \varepsilon_i^*)}{\varepsilon_i^*} \right] \varepsilon^* \right\} \left\{ R(m(R))^{\frac{\nu}{2}} - 1 \right\}^{-1}$$

Начальные значения скорости и ускорения частиц при $t = 0$, $R = r^* = r_0$

$$y_0 = \frac{1 - b_1}{\rho_0} \left\{ p_0 - p_\alpha - \left[\frac{\sigma(\varepsilon^*)}{\varepsilon^*} + \frac{4}{9} \frac{\sigma_i(\varepsilon^*, \varepsilon_i^*)}{\varepsilon_i^*} \right] \varepsilon^* \right\}$$

$$y_0' = \frac{3}{4r_0} \left(\frac{b_1}{1 - b_1} - \gamma \right) y_0 - \frac{4\tau_0 b_1}{3\rho_0 r_0}$$

Основные отличия данного исследования заключаются в следующем:

1. С учетом эффекта касательных напряжений, действующими на площадке скольжения выведены уравнения одномерного динамического движения грунта. В частном случае, когда касательные составляющие напряжений отсутствуют в наклонных площадках при взрыве взрывчатого вещества, имеем аналогичное уравнение динамического движения, полученное в работе [1].

2. Учитывая важность значения предельной нагрузки на грунт, необходимые в расчетах устойчивости массивов грунта и давления грунтов на ограждения предлагается использовать условие пластичности Мизеса-Шлейхера-Боткина, применение которого к грунтам и горным породам предложено С.С. Григорьяном [7].

Это условие предполагает, что при пластическом состоянии твердой среды интенсивность касательных напряжений, определяемая вторым инвариантом девиатора тензора напряжений является некоторой функцией среднего нормального напряжения.

3. При моделировании грунта как упругопластической среды использованы результаты экспериментальных исследований по определению механических свойств грунтов при высоких напряжениях в виде $\sigma(\varepsilon)$ и $\sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)$, проведенного автором под непосредственным

руководством академика Х.А.Рахматулина.

4. При определении радиального напряжения на фронте ударной волны использованы экспериментальные зависимости $\sigma(\varepsilon^*)$ и $\sigma_i(\varepsilon_i^*, \varepsilon_i^*)$.

5. Обосновано, что результаты данного исследования могут быть использованы в следующих целях: при изучении влияния различных сильных взрывов на специальных крупных подземных сооружениях, создание взрывным способом различных котлованов, шахтных стволов, каналов и подземных ёмкостей газов и нефтехранилищ, и других.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рахматулин Х.А., Сагомоян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов, -М.: Издательство Московского государственного университета им. Ломоносова, 1964. –240 с.
- [2] Ляхов Г.М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах, -М.: Издательство «Недра», 1974. –192с.
- [3] Сагомоян А.Я. Волны напряжения в сплошных средах, М.: Издательство Московского государственного университета им. Ломоносова, 1985, С. 416.
- [4] Строганов А.С. Горные давления и крепь вертикальных стволов / М.: Госгортехиздат, 1963, С. 29-55.
- [5] Набиев А.Н. Метод определения основных механических свойств грунтов при высоких напряжениях, Деп. Во ВНИИС Госстроя, №6683-86, – 11с.
- [6] Набиев А.Н. Одномерные движения упругопластической среды со сферическими, цилиндрическими и плоскими волнами // Республиканская научно-практическая конференция «Проблемы практические задачи механики и математики», 26-28 мая, ТКТИ, 2022. С. 172-175.
- [7] Григорян С.С. Об общих уравнениях динамики грунтов. Доклады АН РФ, 1959. №2. –С. 124.
- [8] Набиев А.Н. и др. К исследованию задачи о распространении цилиндрической ударной волны в упругопластической среде // “Ҳозирги замон аниқ ва техник фанлар муаммолари ва уларнинг ечимлари” мавзусидаги Республика илмий-назарий конференция материаллари, Ажинияз номидаги НДПИ, Нукус: 2018. 90-94 бетлар.

Дата поступления
20.06.2023

Набиев А.Н., Набиев А.А. Грунтда цилиндрик зарба тўлқинларининг тарқалиши

Аннотация. Оддий ва силжииш кучланишларининг биргаликдаги таъсирини ҳисобга олган ҳолда, тупроқнинг бир ўлчовли динамик ҳаракати тенгламалари чиқарилади, унга кўра цилиндрсимон симметрияга эга портлаш пайтида зарба тўлқинларининг тупроқ массивларида тарқалиш қонуниятлари ўрганилади. Мизес-Шлейхер-Боткин пластиситивлик шартини бирлашган тупроқларнинг фазовий ҳаракатида қўлланилади ва муаллиф томонидан олинган $\sigma(\varepsilon)$ ва $\sigma_i(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ шаклдаги юқори кучланишдаги тупроқларнинг механик хусусиятларини аниқлаш бўйича экспериментал тадқиқотлар натижалари ҳам қўлланилади. Тупроқни эластик-пластмасса муҳит сифатида моделлаштириши.

Калим сўзлар: тупроқнинг бир хиллиги; силжииш ва зичлиги; портлаш; нормал ва силжииш кучланишлари; тупроқни моделлаштириши; зарба тўлқини.

Nabiev A.N., Nabiev A.A. Propagation of a cylindrical shock wave in the ground

Annotation. Taking into account the joint actions of normal and shear stresses, the equations of one-dimensional dynamic motion of soil are derived, according to which the laws of propagation of shock waves in soil massifs during an explosion with cylindrical symmetry are studied. The Mises-Schleicher-Botkin plasticity condition is applied in the case of spatial motion of cohesive soils, and the results of experimental studies to determine the mechanical properties of soils at high stresses in the form $\sigma(\varepsilon)$ and $\sigma_i(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ obtained by the author were also used when modeling the soil as an elastic-plastic medium.

Keywords: homogeneity; displacement and density of soil; explosion; normal and shear stresses; soil modeling; shock wave.

ПРОБЛЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ШЛАКА В ИНДУКЦИОННЫХ ТИГЕЛЬНЫХ ПЕЧАХ

Алимухамедов Ш.П., Турсунов Н.К., Тоиров О.Т.

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

E-mail: u_nadir@mail.ru

Аннотация: Статья посвящена проблеме формирования шлака в индукционных тигельных печах (ИТП). Рассмотрен наилучший способ уменьшения высоты мениска в процессе формирования активного шлака при выплавке металла в ИТП. Дана методика расчета высота столба металла, уравнивающая электромагнитное давление.

Ключевые слова: шлак; мениск; электромагнитные силы; индукционная тигельная печь; неметаллические включения; десульфурация; рафинирование.

Шлаки в процессе выплавки металла в индукционных тигельных печах до настоящего времени не нашли широкого применения в металлургической практике. Это обусловлено, прежде всего, низкой реакционной способностью шлаков, разогрев которых происходит только в зоне контакта с поверхностью металла, малой величиной поверхности контакта “металл – шлак”, взаимодействием шлаков с футеровкой тигля.

Электромагнитные усилия и вызванная ими электродинамическая циркуляция металла деформируют поверхность ванны, которая приобретает выпуклый мениск высотой $h_{эд}$ (рис. 1). Вследствие этого шлак, покрывающий поверхность металла, стекает к стене тигля, и для того, чтобы все зеркало ванны было покрыто шлаком, приходится давать больше шлакообразующих.

Шлак, скопляющийся у стены тигля и химически взаимодействующий с футеровкой, разъедает ее на большем протяжении, чем при плоской поверхности металла. Кроме того, при циркуляции металла происходит увеличение экзогенных частиц шлака и продуктов разрушения футеровки тигля в объеме металла.

Электромагнитные силы в металлическом цилиндре, помещенном в цилиндрический индуктор, направлены радиально к оси цилиндра (по направлению потока энергии), причем максимальное давление создается этими силами на оси цилиндра.

Электромагнитные силы, действующие на поверхность металла у дна тигля и на зеркало ванны, весьма малы, электромагнитное давление на оси тигля будет выжимать металл в места с пониженным давлением, т. е. вверх и вниз, этот металл будет перетекать от оси тигля к стене вверх и вниз.

Радиальные силы у поверхности металла усиливают возникающую циркуляцию, называемую двухконтурной. Высота столба металла Δh_m (м), уравнивающая электромагнитное давление $(f_{сж})_{max}$, для ИТП определяется по формуле

$$\Delta h_m = \frac{(f_{сж})_{max}}{d_m \cdot g} \approx \frac{0,32 \cdot 10^{-4} q_m}{d_m \sqrt{\rho_m f}} \approx \frac{6,4 \cdot 10^{-8} (IN_1)^2}{d_m},$$

где $g = 9,81 \frac{м}{с^2}$ – ускорение свободного падения; $q_m = \frac{P_m}{\pi \cdot D_m \cdot h_m}$ – плотность потока активной мощности, Вт/м²;

P_m – мощность, выделяемая в металле; $0,32 \cdot 10^{-4} \approx \frac{\sqrt{10^{-7}}}{9,81}$ –

коэффициент; $6,4 \cdot 10^{-8} \approx \frac{2\pi\sqrt{10^{-7}}}{9,81 \cdot \sqrt{10^7}}$ – коэффициент; $h_m =$

$\frac{4m_o}{\pi D_m^2 d_{ж.м}}$ – глубина металла, м; d_m – плотность жидкой стали, т/м³; f – частота тока; ρ_m – УЭС жидкой стали.

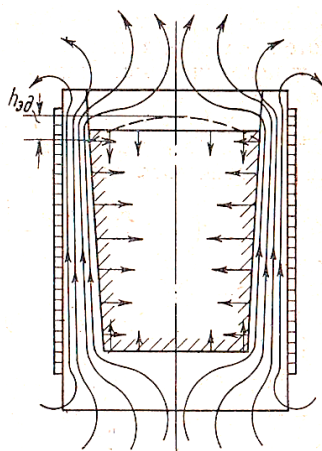


Рис. 1. Магнитное поле и электромагнитные силы в тигле ИТП

IN_1 – настил тока индуктора, определяющий величину напряженности магнитного поля на внутренней поверхности и в полости индуктора, А/м.

Обычно высоту мениска ограничивают 15 % от высоты металла в тигле, т. е.

$$\frac{\Delta h}{h_m} < 0,15.$$

Наиболее распространенный способ уменьшения высоты мениска Δh_m основан на уменьшении напряженности магнитного поля в верхней части ванны ИТП, в результате чего циркуляция вблизи зеркала ванны ослабляется и подавляется ферростатическим давлением (рис. 2). Однако несимметричное расположение индуктора относительно металла уменьшает теплогенерацию в верхней части тигля и затрудняет плавление металлошихты (отдельные куски шихты свариваются в сплошной «мост», препятствующий сходу холодной шихты в зону плавления). Поэтому целесообразно регулировать электродинамическую циркуляцию по ходу плавки, применяя либо механическое понижение уровня индуктора поднятием тигля или опусканием индуктора, либо электрическое понижение уровня индуктора путем отключения верхних витков [1-2].

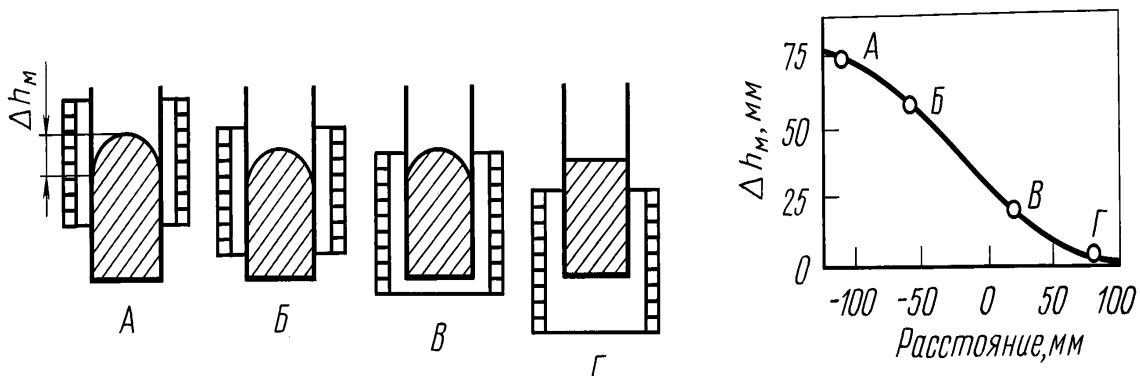


Рис. 2. Зависимость высоты мениска Δh_m от расстояния между центрами металла и индуктора при разном их взаимном расположении (позиции. А, Б, В и Г).

Однако при создании условий, компенсирующих эти недостатки, возможно эффективное использование шлаков для десульфурации и рафинирования металла от неметаллических включений.

Нагрев шлака плазменной дугой. При установке плазматрона в своде печи (рис.3) появляется возможность подогрева шлака до температуры, требуемой для проведения металлургических процессов на границе «металл- газовая фаза-шлак» [2-4].

Применение шлака системы $(CaO:CaF_2:MgO=7:2:1)$ в индукционно-плазменной печи (ИПП) позволило значительно увеличить скорость процесса десульфурации. При этом по сравнению с обычной плавкой степень удаления серы из низколегированной стали повысилось с 40 до 70 %, а из жаропрочного сплава с 20 до 50 %.

В период рафинирования металла включение плазматрона позволяет нагревать шлак, увеличивая его реакционную способность, что невозможно в ИТП.

Нагрев шлака дугой постоянного тока. Для интенсификации процесса плавки в ИТП применяют энергию дуги постоянного тока (рис.4). В этом случае графитированный электрод вводят через свод, а подовый электрод - через днище тигля. Дополнительный подогрев дугой нагревает шлак, и улучшить качество металла за счет повышения активности флюса и сокращения угара элементов.

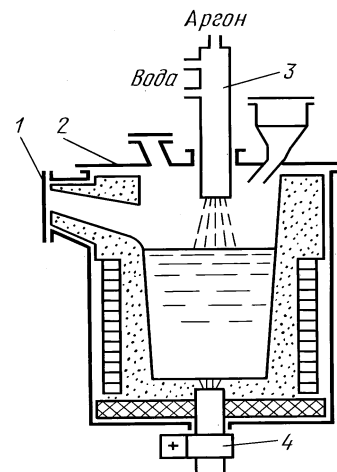


Рис. 3. Схема ИПП: 1 – герметичный сливной носок; 2 – крышка (свод); 3 – дуговой плазматрон; 4 – подовый электрод – анод.

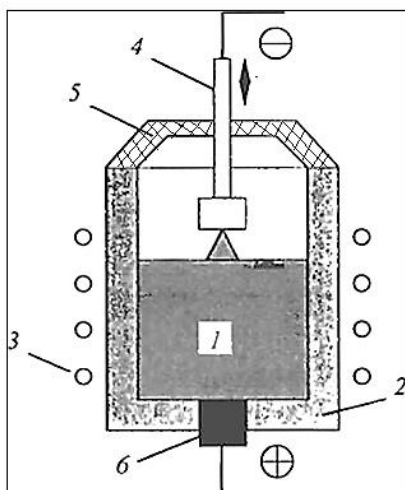


Рис. 4. Схема печи комбинированного нагрева: 1- нагреваемый металл, 2 - тигель, 3 - индуктор, 4 - графитированный электрод, 5 - свод, 6 - подовый электрод

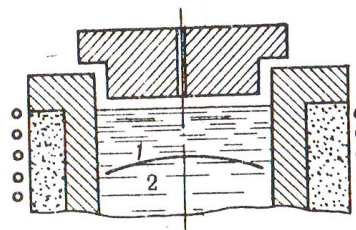


Рис.5. Графитовая крышка для подогрева шлака: 1- шлак; 2 – металл

В технологический период дуговой нагрев позволяет подогревать "холодный" малоактивный шлак ИТП, увеличивая его рафинировочную способность.

Дополнительное применение дуги постоянного тока, горящей между графитированным электродом и шихтой, позволяет быстро проплавить в ней вертикальный "колодец". Отдельные куски шихты, образующие внутренние стенки "колодца", оплавляются и электрически перемикаются, в результате чего общее электросопротивление шихты снижается, а мощность, передаваемая ей от индуктора, резко возрастает. Происходит сокращение длительности периода расплавления на 20...30 % и снижение удельного расхода электроэнергии [5-9].

Нагрев шлака графитовой крышкой и током по принципу сопротивления. Проведены лабораторные эксперименты процесса десульфурации в ИСТ-0,02 под шлаком, состоящим из 80 % доломита ($\text{CaCO}_3 \cdot \text{MgCO}_3$) и 20 % плавикового шпата (CaF_2). При подогреве шлака графитовой крышкой (рис. 5 и 6), нагреваемой индуцированным током, содержание серы в металле снизилось за 21 мин с 0,090 до 0,036% и с 0,040 до 0,022 %.

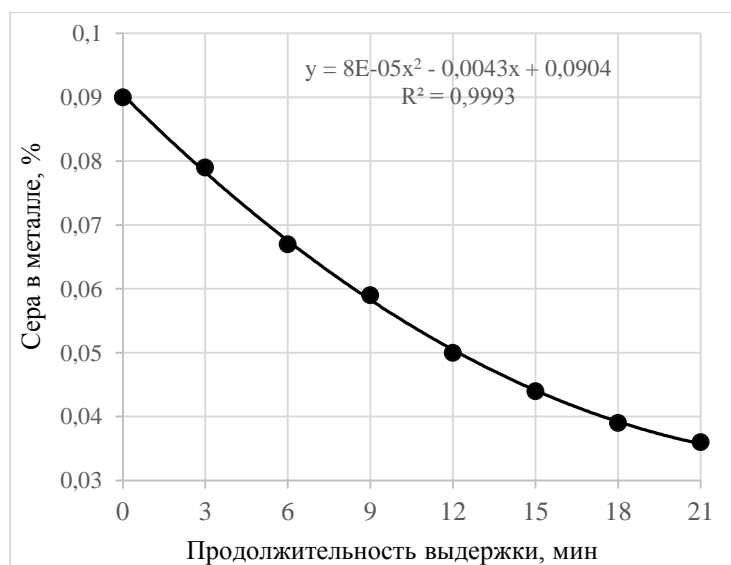


Рис. 6. Зависимость процентного содержания серы от продолжительности выдержки

Во второй серии экспериментов применили непосредственный нагрев вышеуказанного шлака током по принципу сопротивления (рис. 7). После расплавления два графитовых электрода диаметром 30 мм погружали в шлак на 50 % его толщины. При расстоянии между электродами 30 мм и напряжении 50 В дуга не возникала. Сила тока поддерживалась на уровне 100–150 А. За счет электролиза шлака в течение 25 мин содержание серы понизилось с 0,090 до 0,007 %, а содержание углерода в металле при этом повышалось со скоростью 0,001% в минуту.

Заключение. Вышеуказанные технические решения еще раз показывают возможность формирования активного шлака при выплавке стали в ИТП и использование в качестве шихты относительно дешевого лома с пониженным содержанием кремния, марганца и повышенным содержанием серы и фосфора.

Как показали эксперименты, при соблюдении условий, связанных с подбором специальных шлаков, контроле температуры ванны и уменьшении высоты мениска, можно добиться существенного рафинирования стали в ИТП.

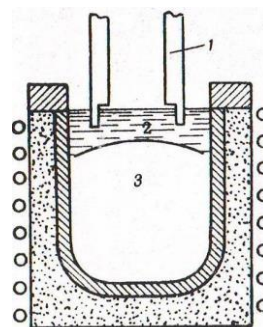


Рис. 7. Подогрев шлака током по принципу сопротивления: 1- электроды; 2- шлак; 3 - металл

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Егоров А. В. Электрометаллургия стали и спецэлектрометаллургия. Электроплавильные печи черной металлургии. - М: МИСиС, 2007. - 428 с.
- [2] Костяков В.Н. Плазменно-индукционная плавка. Киев: "Наукова думка". 1991 г. -205с.
- [3] Фарнасов Г.А. Электротехника, электроника, электрооборудование. Учебник для вузов. М.: "ИНТЕРМЕТ ИНЖИНИРИНГ", 2000. -392с.
- [4] Tursunov N. K., Semin A. E., Sanokulov E.A. Research of dephosphorization and desulfurization processes in smelting of 20GL steel in an induction crucible furnace with further processing in a ladle using rare earth metals. Chern. Met., 2017. Vol. 1. P. 33-40.
- [5] Турсунов Н. К., Тоиров О. Т., Железняков А. А., Комиссаров В. В. Снижение дефектности крупных литых деталей подвижного состава железнодорожного транспорта за счет выполнения мощных упрочняющих ребер. 2022.
- [6] Тен Э. Б., Тоиров О. Т. Оптимизация литниковой системы для отливки «Рама боковая» с помощью компьютерного моделирования. Прогрессивные литейные технологии. 2020. С. 57-63.
- [7] Турсунов Н. К., Тоиров О. Т. Снижение дефектности рам по трещинам за счёт применения конструкции литниковой системы. 2021
- [8] Семин А. Е., Турсунов Н. К., Косырев К. Л. Инновационное производство высоколегированной стали и сплавов. Теория и технология выплавки стали в индукционных печах. 2017.
- [9] Tursunov N. K., Semin A. E., Sanokulov E. A. Study of desulfurization process of structural steel using solid slag mixtures and rare earth metals. Chernye metally, 2016. Vol. 4. P. 32-7.

Дата поступления
18.04.2022

Алимухамедов Ш.П., Турсунов Н.К., Тоиров О.Т. Индукцион тигел печларда шлак ҳосил бўлиши муаммолари

Аннотация: Мақола индукцион тигелли печларда (ИТП) шлак ҳосил бўлиши муаммоларига бағишланган. ИТПда металл еритиш жараёнида фаол шлак ҳосил бўлишида мениск баландлигини камайтиришнинг энг яхши усули кўриб чиқилган. Электромагнит босими мувозанатлаштирадиган металл баландлигини ҳисоблаш усули берилган.

Калит сўзлар: шлак; мениск; электромагнит кучлар; индукцион тигел печи; металл бўлмаган қўшимчалар; олтингурутдан тозалаш; тозалаш.

Alimukhamedov Sh.P., Tursunov N.K., Toirov O.T. Problems of slag formation in induction crucible furnaces

Annotation: The article is devoted to the problem of slag formation in crucible induction furnaces (CIF). The best way to reduce the height of the meniscus in the process of active slag formation during metal smelting in the CIF is considered. The method for calculating the height of the metal column, which balances the electromagnetic pressure, is given.

Keywords: slag; meniscus; electromagnetic forces; induction crucible furnace; non-metallic inclusions; desulfurization; refining.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОДВОДНОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТИ

¹Далабаев У., ²Латипов Н.

¹Университет мировой экономики и дипломатии, Ташкент, Узбекистан

²Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: udalabaev@mail.ru

Аннотация. В работе исследуется течение несжимаемой жидкости в открытом потоке с неравномерным дном и уклоном. Неровное дно имеет место из-за растительности. Течение моделируется на основе двухскоростной модели Рахматулина, при ламинарном режиме с нулевой скоростью дискретной фазы. Рассматривается течение вязкой жидкости в канале с открытым потоком с растительностью на дне потока. Приведены результаты численного моделирования гидродинамических особенностей двумерного вязкого потока. В качестве силы взаимодействия с растительностью используется соотношение Козени-Кармана. Методами вычислительного эксперимента исследуются эффекты неравномерности поля скорости жидкости, возникающие за счет растительности. Проведено качественное сравнение скоростных неоднородностей. Для численной реализации полученного уравнения, которое является обобщением уравнения Навье-Стокса, использован SIMPLE подобный алгоритм с соответствующими обобщениями. Применяется единый алгоритм для всей области, без выделения свободной и пористой зоны.

Ключевые слова: открытый поток; численное решение; обобщение уравнения Навье-Стокса; комбинированная область; растительность; профиль скорости; подслон шероховатости.

Введение. Во многих экологических и технических процессах речная растительность играет центральную роль при управлении руслами рек. В русловых процессах наблюдаются взаимодействия потока жидкости с гетерогенными средами. Гетерогенная среда - это комбинированная область, в которой есть свободная зона и пористый слой. Например, течение в реках при наличии отложения, течение в реках с растительностью, течение с неравным дном, протекание потока сквозь слой, включающий пористую среду и т.д. Изучение законов течения сплошных сред сквозь гетерогенный слой является одним из направлений исследований в области механики многофазных сред [1-9].

При моделировании гидродинамических процессов в таких средах слой создает значительное гидродинамическое сопротивление. При этом, непосредственно за слоем образуется неоднородность потока и возникают вторичные течения. В работе [10] экспериментально изучена профиль скорости течения с проницаемым дном в открытом потоке с уклоном. Во время проведения эксперимента наблюдался турбулентный пограничный слой над шероховатым дном. Исследование, проведенное в [11], направлено на выявление структуры течения в русле, где ширина зоны растительности изменяется по синусоидальной кривой. Было проведено трехмерное численное моделирование со стандартной $k-\epsilon$ моделью для изучения распределения средней скорости течения и турбулентности в основном русле и зоне растительности.

В работе [12] предложена математическая модель задачи о движении двумерного турбулентного потока жидкости в напорном канале с волнистым дном. Математическая модель включает уравнения Рейнольдса, уравнения переноса кинетической энергии и диссипации турбулентности, приведенные к квазигидродинамическому виду. Предложен алгоритм решения задачи с помощью метода контрольных объемов и метода конечных элементов. Численно решена задача о движении турбулентного потока над неподвижными пологими песчаными дюнами. Выполнено сравнение полученных расчетов с экспериментальными данными.

В работах [13-15] при исследовании течения с подводными растениями было получено S образные профили скорости.

Данная работа посвящена исследованию перераспределения потока жидкости в открытом потоке с уклоном канала в присутствии растительности на основе двухскоростной модели.

Математическая модель и численный метод

Рассмотрим взаимопроникающую модель, описывающую течения двухфазных сред [8-9], где пренебрегается скоростью дискретной фазы. Тогда течение жидкой фазы описывается системой уравнений (двумерной случай):

$$f u \frac{\partial u}{\partial x} + f v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{f}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial v}{\partial x} \right) - C u - \frac{\sin \alpha}{Fr}, \quad (1)$$

$$f u \frac{\partial v}{\partial x} + f v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{f}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{4}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial v}{\partial x} \right) - C v - \frac{\cos \alpha}{Fr}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (f u)}{\partial x} + \frac{\partial (f v)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Здесь, u, v – продольная и поперечная скорости потока, p – давление, f – объемная концентрация, Re – число Рейнольдса, C – коэффициент взаимодействия. В уравнениях (1-3) параметры безразмерные ($\text{Re} = UH\rho/\mu$), U – среднеобъемная скорость, L – характерный масштаб, ρ – плотность жидкости, μ – вязкость). За коэффициент взаимодействия использовано соотношение Козени-Кармана: $C = \frac{D^2 (1-f)^2}{\text{Re} f^2}$, $D = \sqrt{\beta H} / d$, где d – характерный размер пористой среды. Fr – число Фруда, α – угол наклона к горизонту, β – коэффициент в формуле Козени-Кармана.

Уравнения (1)-(3) позволяют изучать течения как внутри, так и вне пористой среды, так как при $f = 1$ мы получаем уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Причём эти уравнения годятся для всей рассматриваемой области. Для численного решения (1)-(3) используем метод контрольного объёма [16,17] с неравномерной сеткой. Неравномерная сетка строилась так, чтобы вокруг пористой среды образовывались их сгущения. Алгоритм SIPMLE [16] обобщён для уравнений (1)-(3). Отметим, что уравнения вида (1)-(3) использовались для определения структуры течения с пористыми включениями в работах [18-21].

На границах расчетной области на твердой стенке задается условие прилипания; на входе в канал заданы гидростатическое давление и течение Пуазеля; и на выходе – мягкое граничное условие. На свободной поверхности используем граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0.$$

Основные допущения при исследовании: 1) поток ламинарный, 2) влияние подводной растительности не оказывает влияние на свободную поверхность.

Результаты и обсуждение.

1. Влияние пористости. Пусть часть открытого канала заполнена растительностью. Уравнение (1)-(3) рассматривается в области: $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq 1$. Ось x направлена по нижней стенке канала, а ось y перпендикулярно к ней. При входе в канал дается параболический профиль скорости. Часть канала $0,5 \leq x \leq 1,5$, $0 \leq y \leq 0,2$ заполнена растительностью.

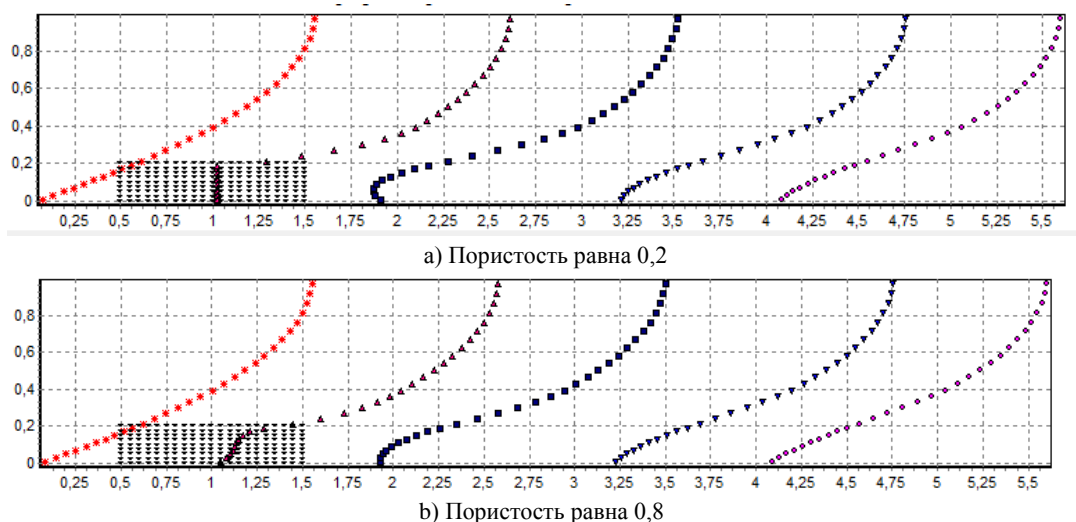


Рис.1 Профили продольной скорости при различных сечениях канала: $x = 0,05; 1,025; 1,933; 3,216; 4,072$ и с параметрами: $D = 100$; $Re = 500$;

Рис.1 показывает сильное влияние пористости растительности на профиль скорости не только внутри, но и за её пределами. При умеренной пористости профиль скорости внутри растительности равномерна, а при увеличении пористости наблюдается неравномерное распределение. Позади растительности картина профиля скорости меняется: при умеренной пористости за слоем наблюдается профиль более неравномерный, по сравнению с высоким пористым слоем.

Влияние числа Рейнольдса. На рис.2 приведены графики профилей распределения при $Re=1000$. Увеличение числа Рейнольдса приведет к увеличению зону вторичного течения (сравнение Рис.1 и Рис.2)

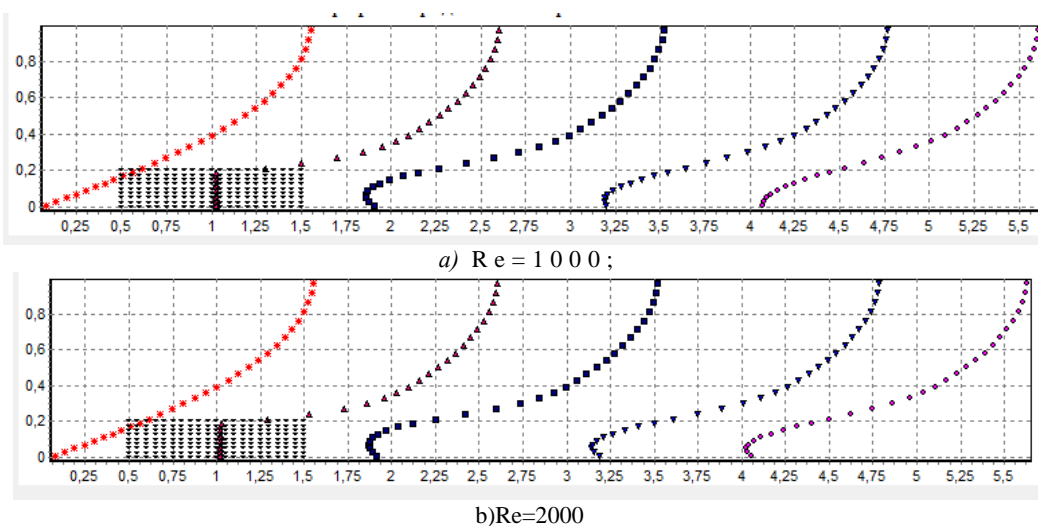


Рис.2 Профили продольное скорости при различных сечениях канала: $x = 0,05; 1,025; 1,933; 3,216; 4,072$ и с параметрами: $D=100$; $f=0.2$ к увеличению зону вторичного течения (сравнение рис.1 и рис.2).

2. Характер изменения поперечное скорости и давления. Рассмотрим характер изменения поперечной скорости по вертикали. (Рис.3).

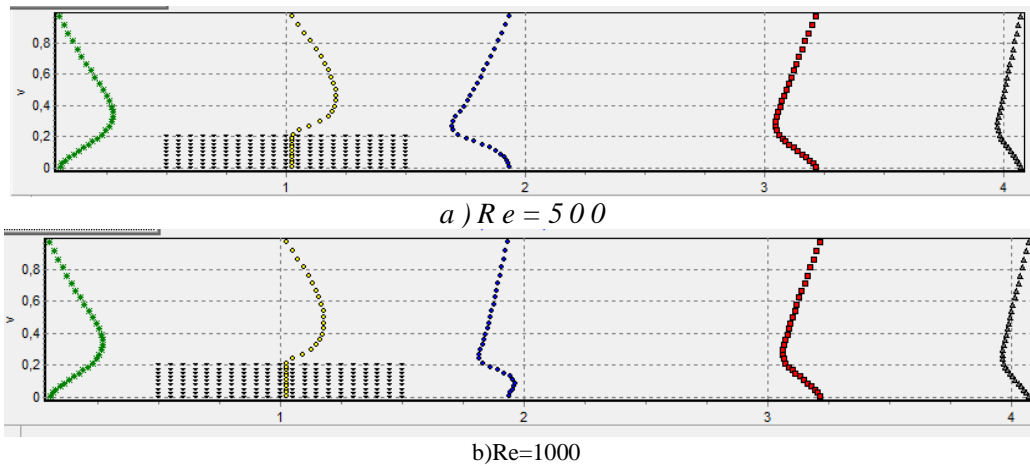


Рис.3 Профили поперечной скорости при различных сечениях канала: $x = 0,05; 1,025; 1,933; 3,216; 4,072$ и с параметрами: $D = 100$; $f = 0.2$

На рис.3 для наглядности изменен масштаб поперечной скорости (значение скорости умножен на 10). Рис.3 показывает существенное влияние наличия растительности на распределение скорости.

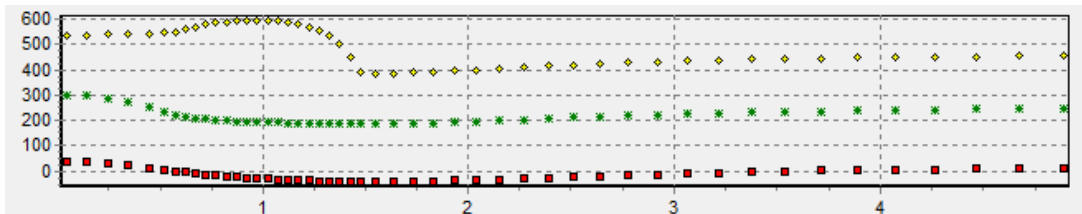


Рис.4 Изменение давления по продольным сечениям канала. Верхняя линия соответствует продольному сечению вблизи к дну канала, средняя – к среднему продольному сечению, а нижняя - к сечению вблизи поверхности воды ($Re=500, f=0.2$).

На рис.4 по оси y отложена разность безразмерного давления: $p - p_{int}$. Здесь p_{int} давление при входе в канал на свободной поверхности. Существенное изменение давление перетерпливает вблизи растительности.

3. Характер изменения коэффициента сопротивления на поверхности дна.

Для анализа получаемых решений задачи полезно рассмотреть коэффициент трения [22]:

$$C_f = \frac{\tau_w}{0.5\rho U^2} \quad (4)$$

где τ_w напряжения трения на поверхности дна. Используя параметры обезразмеривания, можно записать выражение для напряжения трения

$$\tau_w = \frac{\mu U}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (5)$$

где n – безразмерная внешняя нормаль к поверхности дна, индекс «w» означает поверхность дна. Подстановка (5) в (4) приводит к выражению для коэффициента трения:

$$C_f = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_w$$

Однако при анализе более удобным является так называемый модифицированный коэффициент трения [8], который определяется как

$$C_f^* = C_f \frac{Re}{2}_w$$

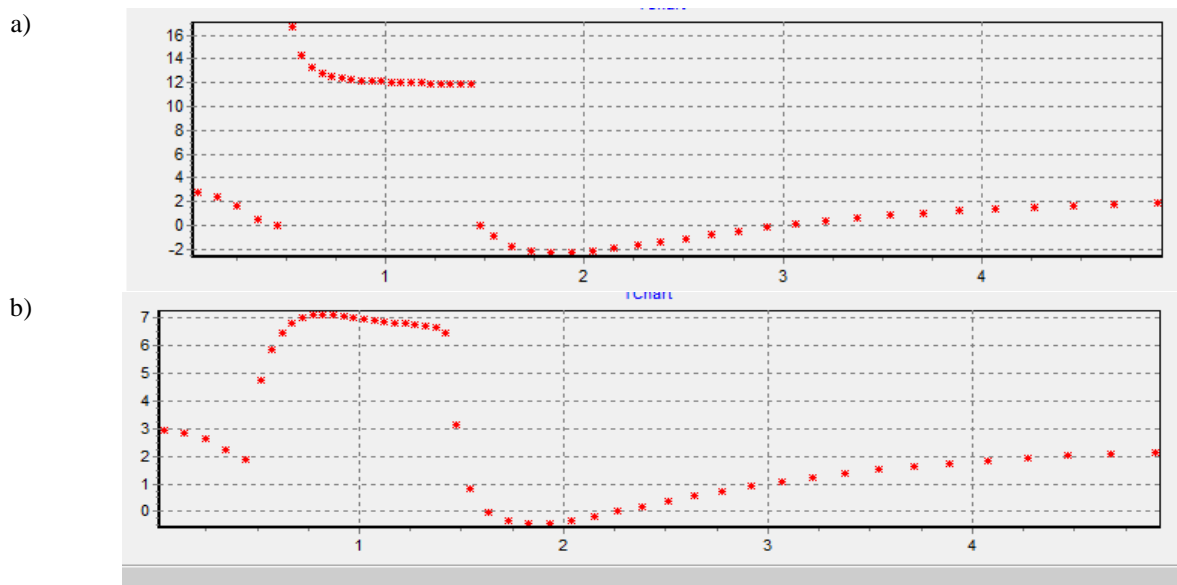


Рис.5 Изменение коэффициента сопротивления C_f^* при $Re=500$, $D=100$ а) $f=0.1$, б) $f=0.8$

Рис. 5 показывает, что пористость растительности существенно влияет на коэффициент сопротивления: при больших пористостях распределение более равномерно на поверхности растительности, нежели при малых значениях.

Заклучение.

С помощью двухскоростной модели в ламинарном режиме удаётся получить профиль скорости качественно согласованные с экспериментальными данными. Расширенную модель Навье-Стокса можно использовать для исследования гидродинамических структур для течения в открытых потоках с подводной растительностью. Коэффициент Козени-Кармана, применяемый в пористой среде, может быть использован в качестве силы сопротивления растительности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Donald A. Nield, Adrian Bejan, Convection in Porous Media, Springer International Publishing AG (2017)
- [2] Matthias Ehrhardt, An Introduction to Fluid-Porous Interface Coupling, Progress in computational physics, 2: P. 3–12, (2000).
- [3] Fernando A. Morales, Ralph E. Showalter, A Darcy–Brinkman model of fractures in porous media, Journal of Mathematical Analysis and Applications, J. Math. Anal. Appl. 452 P. 1332–1358, (2017).
- [4] Ochoa-Tapia, J.A., Whitaker, S., Momentum jump condition at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: inertial effect. J. Porous Media 1, P. 201–217, (1998).
- [5] Yu, P., T.S., Zeng, Y. Low, Y. T., A Numerical for flows in porous and homogenous fluid domains coupled at the interface by stress jump. Int. J. Numer. Meth. Fluids 53, 1755-1775, <https://doi.org/10.1002/flid.1383>.
- [6] Гольдштик М.А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: Институт теплофизики СО АН СССР, 1984. 164 с.
- [7] Кириллов В.А., Кузьмин В.А., Пьянов В.И., Ханаев В.М. О профиле скорости в неподвижном зернистом слое // ДАН СССР. 1979. Т.245, №1. - С.159-162.
- [8] Faizullaev, Dzharulla F, Laminar Motion of Multiphase Media in Conduits, Springer US, ISBN 978-1-4899-4832-8, (1969)
- [9] Nigmatulin, R. I., Fundamentals of the mechanics of heterogeneous media, Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 336 p. In Russian, (1978)
- [10] Gauthier Rousseau, Ivan Pascal, Christophe Ancey. Modeling turbulent stream flows over rough permeable beds. 10th Conference on Fluvial Hydraulics, Jul 2020, Delft, Netherlands. hal-03109313
- [11] Jahra Fatima, Hiroyuki Yamamoto, Fumiaki Hasegawa and Yoshihisa Kawahara, Experimental and numerical analysis of open channel flows with submerged and emergent vegetations, Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE, Vol.54, 2010, February, P. 169-174.
- [12] Потанов И.И., Снугур К.С., Цой Г.И. О моделировании обтекания пологих песчаных дюн турбулентным потоком // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, . 6. С. 99–107. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.012.
- [13] Carollo, F., Ferro, V., & Termini, D. (2002). Flow velocity measurements in vegetated channels. Journal of Hydraulic Engineering, 128(7), P. 664-673.
- [14] Ikeda, S., & Kanazawa, M. (1996). Three-dimensional organized vortices above flexible water plants. Journal of Hydraulic Engineering, 122(11), P. 634-640.

- [15] Kouwen, N., Unny, T.E., and Hill, H.M., Flow retardance in vegetated channels. Journal of Irrigation Drainage Engineering, 1969. 95(2), P. 329-344.
- [16] Patankar S. Numerical Heat Transfer and fluid Flow, ISBN 9780891165224 Published January 1, by CRC Press, (1980)
- [17] Blazek J. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier, P. 470, (2001).
- [18] Далабаев У. Структура потока при течении через неподвижный зернистый слой Инженерно-физический журнал, Минск., т.70, №3, 1997, С.390-394.
- [19] Dalabaev U. Turkish Journal of Physics, v. 21, '5, 1997, P. 649-356.
- [20] Numerical investigation of the character of the lift on a cylindrical particle in poiseuille flow of a plane channel. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. Т. 84, №6. Minsk. 2011.
- [21] Dalabaev Umuridin. Mathematical Description of the Fluid Flow Outside and Inside a Porous Medium Based on an Interpenetrating Model. AIP Conference Proceedings. 2021. 2365. 060015, <https://doi.org/10.1063/5.0057568>.
- [22] Loitsyanskii L.G. Mechanics of liquids and gases. New York: Begell House, 1995. 971 p.

Дата поступления
22.06.2023

Далабаев У., Латипов Н. Сув ости ўсимликлари мавжудлигида оқимни моделлаштириши

Аннотация. Мақолада сиқилмайдиган суюқликнинг туби текис бўлмаган ва нишабли очиқ каналдаги оқими ўрганилган. Каналнинг пастки нотекис ўсимликлар мажмуидан иборат. Оқим икки тезликли Рахматулин модели асосида, дискрет фазанинг нол тезлиги билан ламинар режимида моделлаштирилган. Оқимнинг пастки қисмида ўсимликлар билан очиқ оқимга ега бўлган каналдаги ёпишқоқ суюқликнинг оқими қўриб чиқилган. Икки ўлчовли ёпишқоқ оқимнинг гидродинамик хусусиятларини сонли моделлаштириши натижалари келтирилган. Козений-Карман ифодаси ўсимликлар билан ўзаро таъсир кучи сифатида ишлатилган. Ҳисоблаш эксперименти усуллари ўсимликлар туфайли юзага келадиган суюқлик тезлиги майдонининг бир хил бўлмаслиги таъсирини ўрганиши учун ишлатилган. Тезликнинг бир хил бўлмаганлигини сифат жиҳатидан таққослаш амалга оширилган. Навиер-Стокес тенгламасини умумлаштириши бўлган натижавий тенглани сонли усулда йегиши учун тегишли умумлашмаларга ега СИМПЛЕ га ўхшаши бўлган алгоритм ишлатилган. Еркин ва гўвакли соҳани ажратилмасдан, бутун майдон учун ягона алгоритм қўлланилган.

Калит сўзлар: очиқ оқим; сонли йечим; Навиер-Стокес тенгламасини умумлаштириши; бирлашган соҳа; ўсимлик, тезлик профили; гўвакли қатлам.

Dalabaev U., Latipov N. Flow modeling in the presence of underwater vegetation

Annotation. The paper investigates the flow of an incompressible fluid in an open stream with an uneven bottom and slope. The uneven bottom is due to vegetation. The flow is modeled on the basis of the two-velocity Rakhmatulin model, in a laminar regime with a zero velocity of the discrete phase. The flow of a viscous fluid in a channel with an open stream with vegetation at the bottom of the stream is considered. The results of numerical simulation of the hydrodynamic features of a two-dimensional viscous flow are presented. The Kozeny-Karman ratio is used as the force of interaction with vegetation. The methods of computational experiment are used to study the effects of non-uniformity of the fluid velocity field, which arise due to vegetation. A qualitative comparison of velocity inhomogeneities is carried out. For the numerical implementation of the resulting equation, which is a generalization of the Navier-Stokes equation, a SIMPLE-like algorithm with appropriate generalizations was used. A single algorithm is applied for the entire area, without highlighting the free and porous zones.

Keywords: open flow; numerical solution; generalization of the Navier-Stokes equation; combined domain; vegetation; velocity profile; roughness sublayer.

УДК 539.3

ИЗУЧЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГРУНТАХ, СОЗДАВАЕМЫХ ДВИЖЕНИЕМ ГРУЗОВОГО ТРАНСПОРТА

Юлдашев Ф.Ш.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан

E-mail: faxa.star@gmail.com

Аннотация. В статье рассмотрено трёхмерная задача о распространении вибраций в грунте, создаваемых грузовым транспортным средством. Нагрузка, создаваемая грузовым транспортом, представлена в виде динамической силы. Задача решается методом конечных элементов. Используются конечные элементы в виде неправильного тетраэдра. Приведены фрагменты результатов исследований по определению степени влияния физических параметров грунта на уровень вибраций, распространяемой в грунте. Проверались перемещения колебаний грунта в различных, удаленных от магистральной дороги, точках.

Ключевые слова: автомобильная дорога; метод конечных элементов; грунт, теория упругости; упругие волны, вибрация; граничные условия; бесконечная плоскость; скорость.

Введение. В настоящее время, в результате увеличения численности населения, строительства зданий и сооружений, развития производственных процессов в промышленности растет спрос на транспортные средства, перевозящие людей и грузы.

Грузовой транспорт является удобным транспортным средством для обслуживания людей и перевозки различного вида грузов. Поэтому потребность в нем растет, количество

грузовых транспортных средств увеличивается из года в год, появляются современные его типы, то есть увеличивается мощность и скорость.

В исследовании [1] анализируется взаимосвязь между типом и техническим состоянием дорожных покрытий, динамическими нагрузками, создаваемыми транспортным средством, и уровнем вибраций, распространяющихся в окружающей среде. Измерения вибрации проводились в восьми разных местах. Динамическая нагрузка измеряется для легковых и грузовых автомобилей. В результате измерений и сравнительного анализа установлено, в какой степени тип дорожного покрытия, его техническое состояние, а также различные динамические нагрузки, создаваемые транспортным средством, влияют на уровень вибрации, распространяющейся в окружающей среде.

Уровень воздействия шума и вибраций, создаваемых при движении транспортных средств, превышает санитарные нормы в несколько раз, возникает много нареканий на необходимость его снижения. В результате экспериментальных опросов населения проблема подобного рода подтверждается, а значит, данная тема остается актуальной [2].

Поскольку грунт является носителем, передающим колебания от источника к зданию или сооружению, необходимо определить свойства грунта, способствующие передаче колебаний через грунт [3, 4].

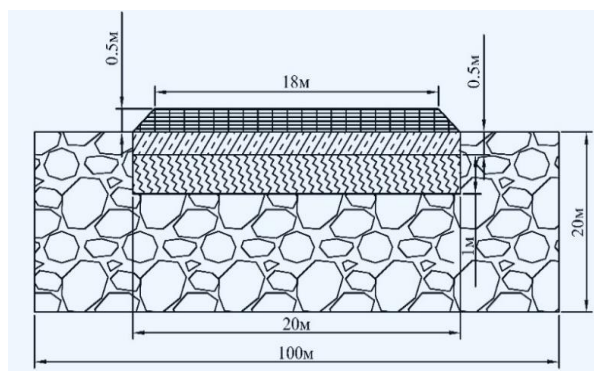


Рис. 1. Поперечный срез асфальтового основания для проектирования дороги

Колебания, возникающие в грунте в непосредственной близости от транспортных сооружений, приводят к возникновению изменений конструкции здания и структуры грунта. Эти негативные изменения чаще встречаются в зданиях, подверженных колебаниям, вызванными непрерывным движением транспортных средств. Учитывая это, в статье изучались колебания, создаваемые грузовыми транспортными средствами в близлежащих зданиях и грунте [5].

Влияние вибрации, создаваемой движущимся транспортом, на людей, здания и производства, расположенные вблизи её источника, было изучено в работе G.R.Watts [6]. На основе проведенных опросов среди населения была подробно изложена суть проблемы, методы прогнозирования степени раздражения при воздействии вибраций и шумов. Изучается влияние вибрации, создаваемой движением транспортных средств, на здания и приводятся данные ряда исследований. Исследования показали недостатки зданий, подверженных постоянным вибрациям.

Agostinacchio M., Ciampa D., Olita S. в своей статье [7] экспериментально проверили взаимодействие между колёсами и дорожным покрытием, при котором вызывается динамическое возбуждение, генерируются волны, распространяющиеся в почве и ударяющиеся о фундаменты близлежащих зданий и сооружений.

Aires Colaço и Pedro Alves Costa проверили вибрации, вызванные движением железнодорожных поездов, в зданиях, с помощью метода конечных элементов 3D [8]. Авторы представили в данной работе общую и эффективную методику моделирования для решения задачи о распространении колебаний в грунтах.

Главной особенностью рассматриваемой нами методики является ее способность эффективно решать задачи с учетом дорожных и грунтовых свойств, т.е. позволяет моделировать большие площади в короткие сроки. При динамической оценке отклика для наблюдательной точки, расположенной в -15м, -25м и -35м от магистральной дороги для

анализируемого конкретного случая, было достигнуто сокращение времени расчета почти на 50%.

Данная исследовательская работа направлена на определение уровня вибраций, возникающих в грунте, расположенном вблизи автомобильной дороги.

Результаты исследования показывают, что было выполнено большое количество работ для определения колебаний, создаваемых движением грузового транспорта, в большинстве которых были получены удовлетворительные результаты. В данном исследовании сравнивались результаты, полученные для различных видов грунтовых оснований.

При рассмотрении волновых процессов в грунте используются следующие модели грунта [9]:

1. Модель Мора-Кулона (упруго идеально пластическое поведение);
2. Модель упрочняющегося грунта;
3. Модели слабого грунта;
4. Модель нелинейного расширения (А.П. Сеницына).

Авторы, изучающие свойства грунтов и сооружений при динамическом воздействии, используют упругопластические модели. Они проще в использовании и хорошо изучены. Однако результаты, полученные с помощью этих моделей, не всегда совпадают с результатами, полученными в ходе экспериментов. Модели вязкопластичных сред дают результаты, более соответствующие результатам эксперимента, но ими сложно пользоваться. Модель нелинейного расширения грунта позволяет рассматривать задачи, связанные с распространением волн в грунте и их взаимодействием с элементами зданий и сооружений, и получать параметры волн, существенно отличающиеся от показателей, полученных с использованием моделей идеальных упругих и нелинейно-упругих сред.

При формировании асфальтобетонного покрытия для транспортной инфраструктуры был использован чертеж, приведенный на рисунке 1, исходя из норм строительства автомобильных дорог.

В соответствии с чертежом на грунт с отметки -1,5 метров над поверхностью укладывают 1 м уплотнённого щебня и 50 см бетонного основания, на которое проектируют асфальтобетонное покрытие толщиной 50 см. Исследовано движение грузового автомобиля массой 45 т вместе с грузом. Грузовой транспорт движется со скоростью 72 км/ч. Так как выбранная предельная площадь имеет длину 100 м, то время вибрации, воздействующей на грунтовое основание, продолжается до полного прохождения грузового транспорта.

Максимальные амплитуды колебаний грунта в пределах от долей *мкм* до нескольких *мкм* в зависимости от следующих факторов: расстояния от пути в плане, свойств грунта, рельефа местности, состояния дороги и многих других.

Поскольку изучить их влияние на уровень колебаний грунта и зданий экспериментальными методами трудно, целесообразно разработать расчетные приемы для учета влияния некоторых из перечисленных выше факторов.

В рассматриваемой задаче необходимо определить уровень вибрации в грунте, возникающей в результате движения грузового транспортного средства. Считается, что динамические нагрузки через колеса грузовика влияют на покрытие автомобильной дороги. Задача приводится к решению пространственной задачи теории упругости о распространении волн в упругом полупространстве.

Понятие бесконечности математически удобно, когда нам нужно найти замкнутую форму аналитического решения. Когда область решения задачи достаточно сложно необходимо обращаться к численным методам конечных разностей или конечных элементов. Этими методами можно рассматривать только конечное количество точек, поэтому они не могут быть прямо применены к бесконечным системам.

Для решения задач численным методом нам необходимо выделить ограниченную область, не нарушая естественного состояния бесконечной полупространства. На границах выделенной области, прилегающих к выброшенной части полупространства, следует поставить такие граничные условия, которые могли бы пропускать волну через эти границы без каких-либо отражений.

В качестве модели было взято грунтовое основание с участком шириной 100 м, длиной 100 м и глубиной 20 м. В вопросе также учитывалось влияние грунтовых вод на глубину до 20 м от поверхности земли. В качестве примера были выбраны характеристики грунта, приведенные в таблицах 1 и 2.

Здесь рассматривается действие десяти сосредоточенных по оси z нагрузок (рис. 3а), движущийся с определенной скоростью по оси y на свободной границе. Определим перемещения и скорости полученных узлов в грунтах с учетом физико-механических характеристик материала. В этой задаче мы заменим бесконечное полупространство конечным параллелепипедом [10, 11, 12, 13]. При этом на гранях параллелепипеда, где отброшено продолжение среды, ставятся условия

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a\rho V_p \dot{u} \\ \tau_{yz} &= b\rho V_s \dot{u} \\ \tau_{zy} &= b\rho V_s \dot{w} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_y &= a\rho V_p \dot{v} \\ \tau_{xz} &= b\rho V_s \dot{w} \\ \tau_{zx} &= b\rho V_s \dot{u} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_z &= a\rho V_p \dot{w} \\ \tau_{xy} &= b\rho V_s \dot{u} \\ \tau_{yx} &= b\rho V_s \dot{v} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Кинематическое отношение может быть сформулировано следующим образом:

$$\varepsilon = Lu \quad (2)$$

L^T - это транспонирование дифференциального оператора, который определяется как

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Для решения задачи воспользуемся методом конечных элементов. Динамическая модель поля решения задачи представлена на рис 2.

В результате применения МКЭ континуальная механическая система приводится к дискретной. Исследуемая область разбита на 7546 конечных элементов с 12536 узлами. Формы конечных элементов выбраны в виде неправильного тетраэдра.

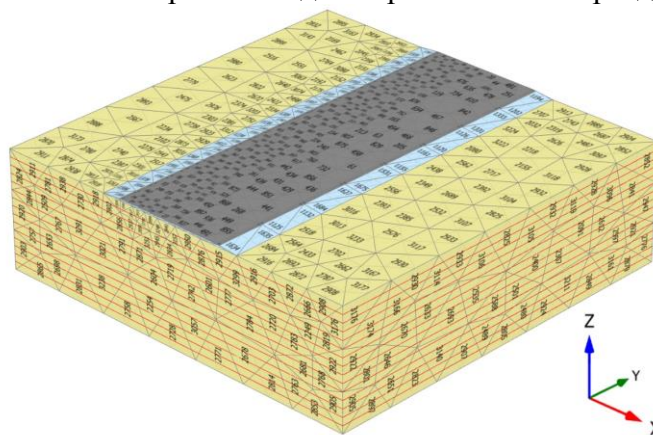


Рис.2 . Модель, в которой область разбита на конечные элементы

Основное уравнение, зависящее от времени движения объема под действием динамической нагрузки, выражается следующим образом:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F, \quad (4)$$

где порядок системы дифференциальных уравнений 37608, M – матрица масс, u – вектор смещения, C – матрица демпфирования, которая также учитывает граничные условия, K – матрица жесткости, F – вектор нагрузки. Перемещение u , скорость \dot{u} и ускорение \ddot{u} могут меняться со временем.

Здесь теория описана в основах линейной упругости. Однако в принципе все модели можно использовать для динамического анализа. (В исследуемых участках для получения данных могут присутствовать уровень грунтовых вод).

Для численной реализации поставленной задачи используем программный комплекс Plaxis 3D [14, 15], где содержится возможные варианты физических уравнений материала.

Матрица M учитывает массу материалов (грунт+вода+любая структура).

Формирование интегрирования по времени в численном представлении динамики важным фактором является устойчивость и точность вычислительного процесса. Используется схема численного интегрирования Ньюмарка.

Свойства грунта и материалов приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1.

Физико-механические свойства материалов

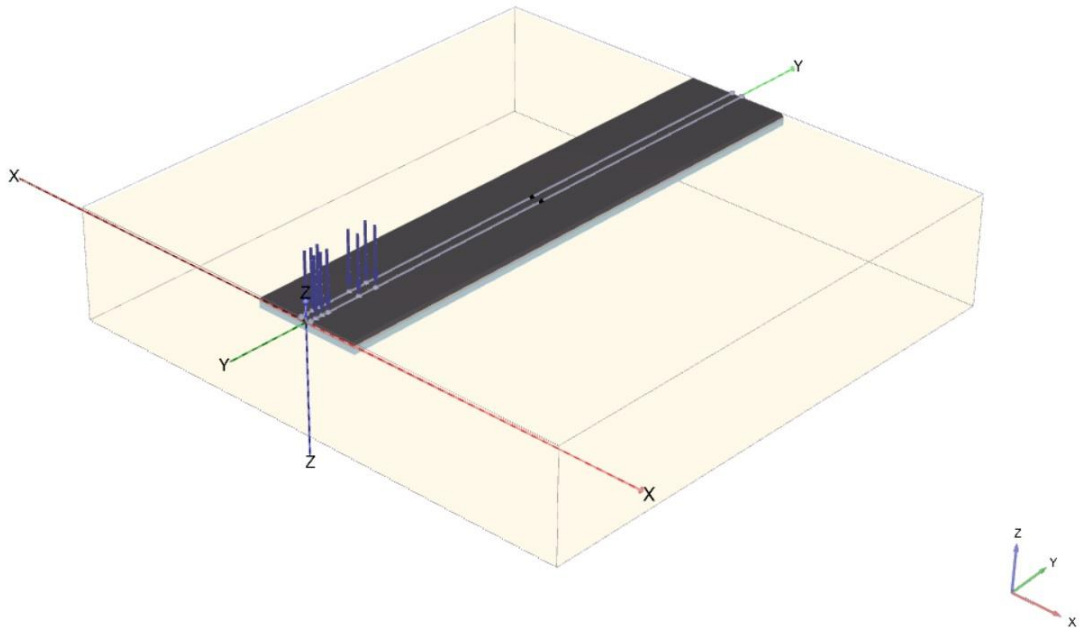
Параметр	Единица измерения	Обозначение	Название грунта		
			Глина	Твёрдый песок	Глинистая мягкая почва
Общие свойства					
Модель грунта	–	–	Мора-Кулон	Мора-Кулон	Мягкий грунт
Тип поведения материала	–	–	Дренажный	Дренажный	Недренажный (А)
Удельный вес грунта выше уровня грунтовых вод	кН/м ³	γ_{unsat}	16	17	15
Удельный вес грунта ниже уровня грунтовых вод	кН/м ³	γ_{sat}	18	20	18
Начальный коэффициент пористости	–	e_{init}			1
Механические параметры					
Модуль Юнга (постоянная величина)	кН/м ²	E'_{ref}	10000	75000	
Коэффициент Пуассона	–	ν / ν_{ur}	0.35	0.3	
Сцепление (постоянное)	кН/м ²	c'_{ref}	5	1	1
Угол внутреннего трения	°	φ'	25	31	25
Угол дилатансии	°	ψ	0	0	0
Коэффициент сжимаемости	–	$\lambda *$			0.05
Коэффициент набухания	–	$k *$			0.01

Таблица 2.

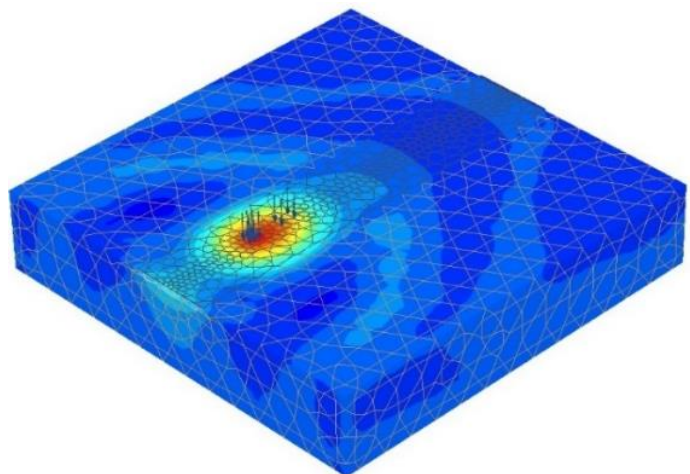
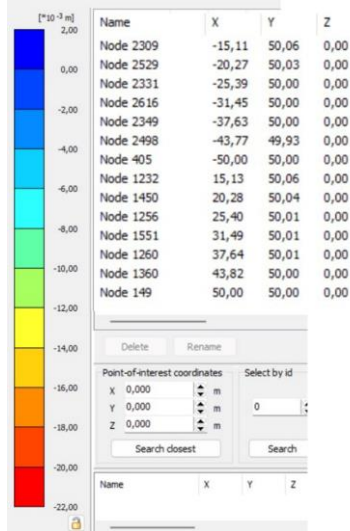
Особенности балластного слоя

Слой балласта	Асфальт	Щебень	Бетон
Особенности укладки			
№	1	2	3
Модель грунта	Линейно эластичный	Мора-Кулон	Линейно эластичный
Тип поведения материала	Дренажный	Дренажный	Непористый
Удельный вес грунта выше уровня грунтовых вод - γ_{unsat} [кН/м ³]	20	19	22,50
Удельный вес грунта ниже уровня грунтовых вод - γ_{sat} [кН/м ³]	20	17,5	22,50
Угол внутреннего трения – φ [°]		25	–
Угол дилатансии – ψ [°]		4	–
Сцепление (постоянное) - c_{ref} [кН/м ²]		14,0	–
Модуль Юнга - E [кН/м ²]	$2,1 \cdot 10^5$	55	$2,6 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона - ν	0.4	0,3	0,2

Результаты.



а) Расположения магистральной дороги, и движений нагрузки на выделенной ограниченной области



б) Координаты расположения наблюдаемых точек в рассматриваемой области

в) Перемещение точек по направлению оси z

Рис. 3. Уровни вибрации в каждом узле проверяемой модели

Графики на рис. 4-6 детализировались, сравнивалось колебания, возникающие в результате движения грузовика, в грунте, находящемся на разном расстоянии от асфальтобетонного дорожного полотна. Для анализа различия уровней распространения колебаний в двух случаях были проанализированы перемещения колебаний в нескольких точках, то есть на расстоянии -15 м , -25 м и -35 м от асфальтобетонного основания.

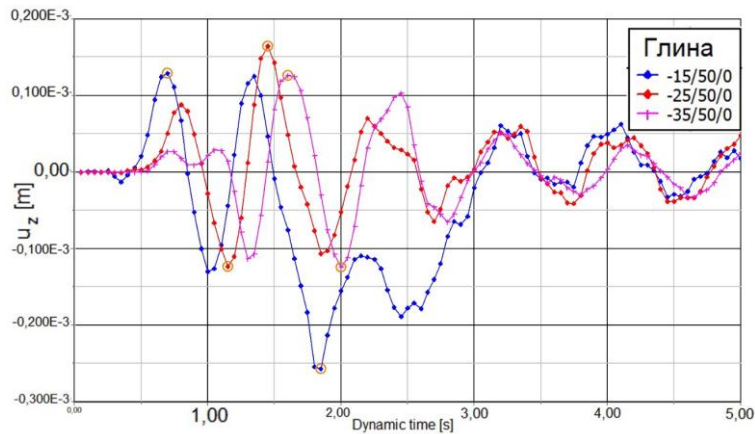


Рис.4. График зависимости от времени перемещения колебаний, возникающих в глинистом грунтовом основании

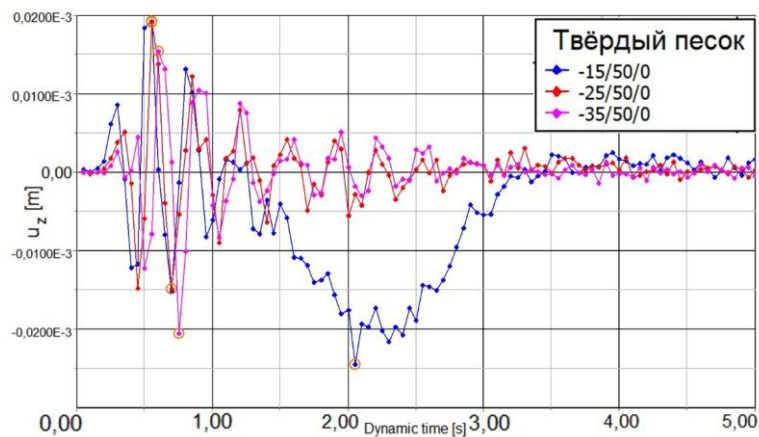


Рис.5. График зависимости от времени перемещения колебаний, возникающих в твёрдо-песчаном грунтовом основании на различных расстояниях

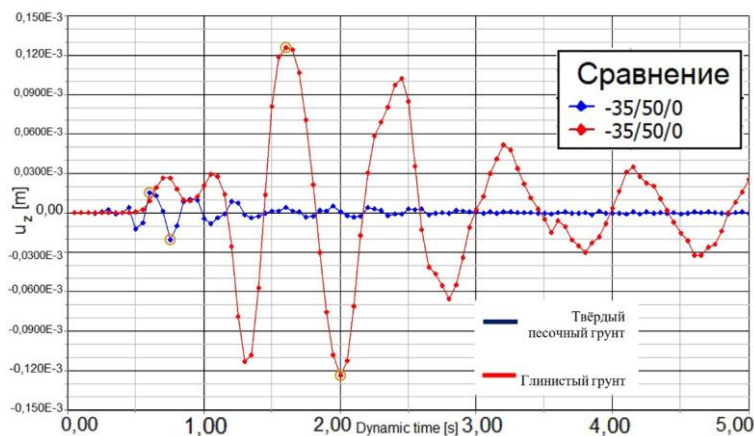


Рис.6. График зависимости от времени перемещения колебаний, в сравнении глинистым и твёрдо-песчаным грунтовым основанием

Выводы. Проведено сравнение результатов, полученных при решении задач о распространении вибраций для двух случаев (твёрдо-песчаное, глинистое) грунтовых оснований. Установлено, что разность наибольших значений виброперемещений в глинистом грунтовом основании с координатой $x=-35, y=50, z=0$ в сравнении с перемещениями точки с координатами $x=-15, y=50, z=0$ уменьшается в 2.32 раза. Аналогично в твёрдо-песчаном грунтовом основании $x=-35, y=50, z=0$ в сравнении с перемещениями точки с координатами $x=-15, y=50, z=0$ уменьшается в 3 раза. Выявлено, что распространение колебаний в грунтах и сооружениях зависит от их свойств (модуля упругости, коэффициента Пуассона, плотности). Исходя из этого, можно сказать, что при изучении процесса распространения вибраций в грунтах необходимо учитывать реальные

физические параметры. Таким образом, на основе полученных результатов можно сказать, что степень вибрации в грунтах, возникающей в результате движения транспортных средств в значительной степени зависит от свойства грунтов. Следовательно, при расчетах, при разработке виброзащитных мероприятий для сооружений, находящийся в близи магистральной дороги, необходимо учитывать физико-механические свойства грунтов, касающиеся рассматриваемой местности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильичев В.А., Маткаримов П.Ж., Юлдашев Ш.С. Исследование вынужденных колебаний неоднородной плоской системы с учетом пассивной виброизоляции // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1999. № 2.
- [2] Томпсон Д.Дж., Цзян Дж., К МГР, Хусейн М.Ф.М., Дийкманс А., Кулиер П., Дегранд Г., Ломберт Г. Снижение вибрации, вызванной железной дорогой, с помощью усиления грунтового основания. Динамика грунтов и сейсмозаведка, 2015. 79: 89-103.
- [3] Цытович Н.А. Механика грунтов. М.: Высш.шк., 1983. 288 с.
- [4] Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов. М.: Издательство АСВ, 2005. 488 с.
- [5] Yuldashev S. S., Voymetrov M. Влияние уровня расположения железнодорожного полотна на уровень распространения волн от движения поездов //Theoretical & Applied Science. 2020. № 5. С. 140-143.
- [6] Watts G.R. Traffic Induced Vibrations in Buildings, Research Report 246, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, UK, 1990.
- [7] Agostinacchio M., Ciampa D., Olita S. The vibrations induced by surface irregularities in road pavements—a Matlab® approach //European Transport Research Review. 2014. Т. 6. № 3. С. 267-275.
- [8] Aires Colaço, Pedro Alves Costa. Vibrations induced by railway traffic in buildings: Experimental validation of a sub-structuring methodology based on 2.5D FEM-MFS and 3D FEM // Engineering Structures. Volume 240, 1 August 2021, 112381
- [9] П.м. 52415 Российская Федерация, МПК7 E02D 27/34. Экран для защиты зданий и сооружений от вибраций // А. П. Бобряков, А. В. Лубягин. – № 2005118573/22; заявл. 15.06.2005; опубл. 27.03.2006; Бюл. № 9. 2 с.
- [10] Ильичев В.А., Юлдашев Ш.С., Саидов С.М. Исследование распространения вибрации при прохождении поездов в зависимости от расположения железнодорожного полотна // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1999. № 2. С. 12-13.
- [11] Юлдашев Ш.С. и др. Влияние высоты расположения железнодорожного полотна на уровень колебания грунта, возникающего при движении поездов //Научное знание современности. 2018. № 10. С. 55-57.
- [12] Il'ichev V.A., Yuldashev S.S., Saidov S.M. Propagation of vibration from trains in relation to track position //Soil Mechanics and Foundation Engineering. 1999. Т. 36. № 2. С. 55-56.
- [13] Lysmer J., Kyhlemyer L. Finite Dynamic Model for Infinite Media // Jour Engineering Mechanics Division. ASCE. 1969. Vol. 95. NoEM4. August. P. P. 859 – 887.
- [14] Plaxis 3d, учебное пособие <https://disk.yandex.ru/i/UOpYcL1n2PhUeg>.
- [15] Учебное пособие по моделям материалов Plaxis 3d <https://disk.yandex.ru/i/tDucCN6cBR2oMg>.

Дата поступления
18.02.2023

Юлдашев Ф. Ш. Юк ташувчи транспорт воситалари ҳаракатидан, грунтда ҳосил бўладиган тўлқин тарқалиши жараёнини тадқиқ қилиши.

Аннотация: Мақолада, юк автомобиллари ҳаракати натижасида грунтда ҳосил бўлган тебранишларнинг тарқалишини уч ўлчовли масаласи кўриб чиқилган. Юк автомобиллари ҳаракати натижасида ҳосил бўлган юк динамик куч сифатида ифодаланган. Муаммо чекли элементлар усули билан ҳал қилинган. Чекли элемент сифатида нотўғри тетраэдр шаклидаги элементлар ишлатилган. Тупроқнинг физик параметрларининг тупроқда тарқаладиган тебранишлар даражасига таъсир даражасини аниқлаш бўйича тадқиқотлар натижаларининг айримлари келтирилган. Асосий йўлдан узоқда жойлашган турли нуқталарда ер тебранишларида грунтнинг кўчишлари текширилган.

Калим сўзлари: автомобил йўли; чекли элемент усули; грунт; эластиклик назарияси; эластик тўлқинлар; тебраниш; чегаравий шартлар; чекзик текислик; тезлик

Yuldashev F.SH. Study of wave processes in soils created by traffic cargo transport.

Annotation: The article considers a three-dimensional problem of the propagation of vibrations in the ground, created by a cargo vehicle. The load created by freight transport is presented as a dynamic force. The problem is solved by the finite element method. Finite elements in the form of an irregular tetrahedron are used. Fragments of the results of studies to determine the degree of influence of the physical parameters of the soil on the level of vibrations propagated in the soil are given. The movements of ground vibrations were checked at various points remote from the main road.

Keywords: road; finite element method; soil; theory of elasticity; elastic waves; vibration; boundary conditions; infinite plane; speed.

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЕ

ДОКТОРУ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, ПРОФЕССОРУ БЫКОВЦЕВУ АЛЕКСАНДРУ СЕРГЕЕВИЧУ – 70 ЛЕТ

Известный учёный механик, доктор физико-математических наук, член редколлегии нашего журнала Александр Сергеевич Быковцев родился 8 августа 1953 года в г. Ташкенте. После окончания Новосибирской физико-математической школы поступил на механико-математический факультет Ташкентского государственного университета (ТашГУ). В 1975 г. стал выпускником кафедры «Механика сплошных сред» факультета прикладной математики и механики ТашГУ. После окончания университета был принят на работу в Институт сейсмологии АН РУз. В том же году А.С.Быковцев поступил в аспирантуру Московского горного института и в 1979 году успешно защитил под руководством профессора Г.П. Черепанова диссертацию по теме «Некоторые задачи динамической теории дислокационных разрывов и их сейсмологическое применение». В период с 1979 по 1981 гг. А.С.Быковцев преподавал в Ташкентском политехническом институте. В 1981 году прошел по конкурсу на должность старшего научного сотрудника и дальнейшая научная деятельность его до 1999 года была связана с Институтом сейсмологии АН РУз. В этот период его научные работы были посвящены моделированию геодинамических и сейсмических процессов происходящих при землетрясениях, и промышленных взрывов при разработке месторождений полезных ископаемых. В 1987 году он успешно защитил в Новосибирске диссертацию на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук по теме «Математическое моделирование процессов разрушения, происходящих внутри и на поверхности земной коры».

С 1987 по 1999 года, работая в Институте Сейсмологии АН РУз А.С.Быковцев проводил исследования на предприятиях Государственного концерна по производству цветных металлов „Норильский никель“ и Навоийском горно-металлургическом комбинате (золоторудный карьер Мурунтау). По результатам изысканий было оформлено два патента на изобретения: Борт карьера БАС-1, связанный с разработкой оптимальной формы бортов карьера; Способ взрывной отбойки БАС-2, относящееся к оптимальной компоновке и детонационно-взрывным работам с минимальным сейсмическим воздействием на борт карьера. Под руководством А.С.Быковцева было защищено одна докторская и 4 кандидатских диссертации.

В 1999-2000 гг. будучи стипендиатом Фулбрайтского гранта проводил исследования в качестве приглашенного профессора в институте «Изучения земной коры» Калифорнийского университета в Санта Барбаре. Дальнейшая научная деятельность проф. А.С.Быковцева неразрывно связана с США где он работает в наши дни в качестве лицензированного профессионального инженера в Региональной Академии естественных наук в Калифорнии. Имея более чем 40 летний опыт работы в области геомеханики, оценке и смягчении ущерба от стихийных бедствий А.С.Быковцев имеет приложения результатов своих работ в России, Узбекистане, Калифорнии, Техасе и Северной Каролине. В его работах особое внимание уделяется геотехническим исследованиям и оценке ущерба от сейсмических воздействий для конкретных площадок с моделированием синтезированных сейсмограмм для атомных станций, высотных зданий, важных объектов строительства, карьеров, плотин, захоронения отходов, а также по оценке устойчивости склонов и откосов с помощью свай, проектирования креплений и геосеток. Д-р Быковцев обладает обширными знаниями в исследованиях свойств грунтов, полевых рекомендаций и геотехнического проектирования, где технический опыт имеет решающее значение.

С 2009 года д-р Быковцев является членом Комитета по строительным стандартам ASCE-7-10 (Американское общество инженеров строителей) с минимальными нагрузкам для зданий и других сооружений. В настоящее время он является членом главного комитета ASCE 7-16 и подкомитета по сейсмическим исследованиям. С 2020 года эксперт для Инженерного корпуса армии США с рецензированием геотехнических отчетов для Южно-Тихоокеанского пограничного округа и проекта строительства пограничной стены с Мексикой, включая консультирование высшего руководства по вопросам управления геотехническими исследованиями и усилиями по улучшению строительства.

Катастрофическое землетрясение в Японии в март 2011 г. послужила поводом для пересмотра и надлежащего анализа сейсмической опасности для атомных электростанций, расположенных в Калифорнии, и стало триггером для переоценки колебаний грунта в окрестностях этих объектов. А.С.Быковцев принимал участие в проведении 3D сейсмических исследований, включая проведение расчетов и определения детерминистических записей движений грунта для смещений, скоростей и ускорений от различных сложных разломов и сейсмических источников с рекомендациями представленными в Комиссию по ядерному регулированию (NRC) США. На их основе были подготовлены письменные комментарии в Энергетическую комиссию Калифорнии о «Проблемах Калифорнийской атомной электростанции».

Александр Сергеевич является автором 5 монографий и учебных пособий, 2 изобретений и более 200 научных статей. Является членом редакционной коллегии журнала Проблемы механики и активно принимает участие в редакционной деятельности нашего издания.

Редколлегия журнала поздравляет профессора Быковцева Александра Сергеевича со славным юбилеем и желает ему крепкого здоровья, семейного благополучия и больших творческих успехов.

Редколлегия

СОДЕРЖАНИЕ

Виктор Васильевич Москвитин и теория циклического нагружения.....	3
Краткое сообщение о «Рахматулинских чтениях».....	5
Действительный член Академии наук Узбекистана академик Халил Ахмедович Рахматулин.....	6
Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А. Абдусаттаров. Знакопеременное термосиловое нагружение трехслойной пластины погонными моментами.....	8
М.Н. Сидиков, К.М. Тўражонов. Анализ стационарных движений статически несбалансированного ротора в рамках модели Джеффкотта.....	16
Н.А. Коршунова, М.И. Рузматов. Новый метод определения аналитических решений задачи оптимизации траекторий в гравитационном поле сферической планеты.....	20
В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Применение дискретного преобразования Фурье для вычисления частот поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении.....	28
А.А. Халджигитов, О.Ў. Тилолов. Численное решение частично-связанной задачи термоупругости в напряжениях.....	35
А.Б. Ахмедов, Ш.Р. Ибодуллаев, Л.А.Кулдибаева. Математическое моделирование распределения поля температур в слоистых пластинах.....	41
А.Х. Закиров. Истечение жидкости из сужающихся-расширяющихся насадок.....	46
А.А. Ризаев, Д.А. Кулдошев, Н.Б. Джураева, Д.Б. Алимова. Исследование эпициклического движения шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата.....	52
М.У. Ходжабеков. Об устойчивости нелинейных колебаний пластины с жидкостным динамическим гасителем.....	60
А.И. Усмонов, Ж.Б.Кулжанов, Ф.У. Сулаймонов. Задача аномальной фильтрации неоднородной жидкости в двумерной области.....	71
А.Н. Набиев, А.А. Набиев. Распространение цилиндрической ударной волны в грунте.....	80
Ш.П. Алимухамедов, Н.К. Турсунов, О.Т. Тоиров. Проблемы формирования шлака в индукционных тигельных печах.....	86
У. Далабаев, Н. Латипов. Моделирование течения при наличие подводной растительности.....	90
Ф.Ш. Юлдашев. Изучение волновых процессов в грунтах, создаваемых движением грузового транспорта.....	95
Доктору физико-математических наук, профессору Быковцеву Александру Сергеевичу – 70 лет.....	103

МУНДАРИЖА

Виктор Васильевич Москвитин ва циклик юкланиш назарияси.....	3
«Рахматулин ўқишлари» конференцияси ҳақида қисқача маълумот.....	5
Ўзбекистон Фанлар академияси ҳақиқий аъзоси Халил Ахмедович Рахматулин.....	6
Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А. Абдусаттаров. Уч қатламли пластинканинг ўзгарувчан термик ва погонли момент таъсирида такрорий юкланиши.....	8
М.Н. Сидиков, К.М. Тўражонов. Джеффкотт моделига асосланган статик балансирланмаган роторни стационар харакатларини таҳлили.....	16
Н.А. Коршунова, М.И. Рузматов. Сфероидал сайёра гравитацион майдонида траекторияларни оптималлаштириш масаласининг аналитик ечимларини аниқлашни янги усули.....	20
В.Л. Литвинов, К.В. Литвинов Узунламасина йўналишда ҳаракатланадиган арконнинг кўндаланг тебраниш частотала- рини ҳисоблаш учун дискрет Фурье конвертациясини қўллаш.....	28
А.А. Халджигитов, О.Ў. Тилолов. Қучланганлик ҳолатида қисман боғлиқли термозластик масалани сонли ечиш.....	35
А.Б. Ахмедов, Ш.Р. Ибодуллаев, Л.А. Кулдибаева. Қатламли пластиналарда ҳарорат майдонининг тақсимланишини математик моделлаштириш.....	41
А.Х. Закиров. Тораювчи-кенгаювчи найчалардан идеал суюқликни оқиб чиқиши.....	46
А.А. Ризаев, Д.А. Кулдошев, Н.Б. Джураева, Д.Б. Алимова. Терим аппаратининг ишчи камерасида шпинделни эпициклик айланганининг тадқиқоти.....	52
М.У. Ходжабеков. Пластинканинг суюқликли динамик сўндиргич билан биргаликдаги чизиксиз тебранишлари устуворлиги ҳақида.....	60
А.И. Усмонов, Ж.Б. Кулжанов, Ф.Ў. Сулаймонов. Икки ўлчамли соҳада биржинслимас суюқликнинг аномал сизиш масаласи.....	71
А.Н. Набиев, А.А. Набиев. Цилиндрик зарбали тўлқинларнинг грунтда тарқалиши.....	80
Ш.П. Алимухамедов, Н.К. Турсунов, О.Т. Тоиров. Индукцион тигел печларда шлак ҳосил бўлиш муаммолари.....	86
У. Далабаев, Н. Латипов. Сув ости ўсимликлари мавжудлигида оқимни моделлаштириш.....	90
Ф.Ш. Юлдашев. Юк ташувчи транспорт воситалари ҳаракатидан, грунтда ҳосил бўладиган тўлқин тарқалиш жарағини тадқиқ қилиш.....	95
Физика-математика фанлари доктори, профессор Александр Сергеевич Быковцев 70 ёшда.....	103